

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

INF
Erläuterung
siehe unten

Diese Klausur ist mein 1. Versuch 2. Versuch in GBI

E-Mail-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
erreichbare Punkte	10	9	6	6	9	5	9
erreichte Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 54
------------------	------

Note:	
-------	--

- INF = Klausur-Version mit 6 LP: Studiengang Informatik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Mathematik, Technomathematik, Lehramt
- PH/GEO = Klausur-Version mit 4 LP: Physik, Geodäsie und Geoinformatik

Wichtige Hinweise

- Stellen Sie sicher, dass Sie die richtige Version der Klausur erhalten haben (INF oder PH/GEO auf der Titelseite)!
- Stellen Sie sicher, dass Ihre Klausur 10 Blätter umfasst.
- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch!
- Tragen Sie *nach der Einlesezeit* Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Matrikelnummer auf dem Titelblatt ein! Tragen Sie Ihre Matrikelnummer auch auf jedem Blatt ein!
- Wenn Sie Ihre Antwort nicht direkt bei der Aufgabenstellung aufschreiben, vermerken Sie unbedingt, wo Ihre Lösung steht.
- Sie können die Leerseiten und das angehängte freie Blatt für Antworten nutzen, falls der Platz bei der Aufgabenstellung nicht ausreicht.
Sie können den Platz auch für Notizen, Skizzen etc. nutzen.
Kennzeichnen Sie deutlich, welche Angaben bewertet werden sollen!
- Weiteres Leerpapier erhalten Sie bei Bedarf auf Nachfrage von der Aufsicht.
- Bitte bleiben Sie bis zum Ende der Bearbeitungszeit am Platz.
- Aufsichtspersonen werden nur organisatorische und keine inhaltlichen Fragen beantworten.

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)

/ 10

a) Geben Sie eine endliche nicht-leere Menge M und eine Relation $R \subseteq M \times M$ an, so dass R

/2

- reflexiv und
- symmetrisch und
- nicht transitiv

ist.

b) Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b\}$. Geben Sie explizit zwei verschiedene Sprachen $L_1, L_2 \subseteq A^*$ in Mengenschreibweise an, die die Gleichung

/2

$$L = \{a\} \cdot L \cup L \cup \{\varepsilon\}$$

erfüllen.

$L_1 =$

$L_2 =$

c) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

/2

i) Gegeben seien Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $g, h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $g \in \Omega(h)$. Dann ist auch $g \circ f \in \Omega(h)$.

/2

ii) Gegeben seien Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f \in \Theta(g)$ und $f(n) \geq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f - g \in O(1)$.

/2

d) Gegeben seien die Variablen t, x, y und der nicht-verzweigende Algorithmus

$$t \leftarrow x ; x \leftarrow y ; y \leftarrow t .$$

Wenden Sie Regeln des Hoare-Kalküls an, um eine Vorbedingung (1) zur angegebenen Nachbedingung (4) zu finden. Geben Sie dazu auch die Zwischenbedingungen (2) und (3) an.

Eingabe: $x, y \in \mathbb{Z}$

(1) { _____ }

$t \leftarrow x ;$

(2) { _____ }

$x \leftarrow y ;$

(3) { _____ }

$y \leftarrow t$

(4) { $x < 5 \wedge y < 7$ }

Aufgabe 2: Prädikatenlogik (1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 3 = 9 Punkte)

/ 9

a) Wir modellieren ein Handballturnier mit Prädikatenlogik.

Jede Mannschaft hat höchstens einmal gegen jede andere Mannschaft gespielt. Jedes Spiel endete mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften oder mit einem Unentschieden.

Gegeben sei dazu die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (V, F, P)$ mit Stelligkeitsfunktion ar und

$$V = \{x, y, z\}, \quad F = \{k, p, h\}, \quad P = \{S, W\}, \\ ar(k) = ar(p) = ar(h) = 0, \quad ar(S) = ar(W) = 2 .$$

Wir betrachten die Interpretation (D, I) , für die Folgendes gilt:

- D ist die Menge aller teilnehmenden Mannschaften.
- $I(k), I(p), I(h)$ sind die Mannschaften aus Karlsruhe, Pforzheim und Heidelberg.
- $(m_1, m_2) \in I(S)$ genau dann, wenn m_1 gegen m_2 gespielt hat.
- $(m_1, m_2) \in I(W)$ genau dann, wenn m_1 gegen m_2 gewonnen hat.

Geben Sie jeweils eine Formel der Prädikatenlogik über Σ mit Gleichheit an, die folgende Sachverhalte darstellt. Achten Sie darauf, sich an die Syntax der Prädikatenlogik zu halten.

i) Pforzheim hat gegen Heidelberg gewonnen und gegen Karlsruhe verloren.

/1.5

ii) Heidelberg hat genau ein Spiel gewonnen.

/1.5

iii) Jede Mannschaft hat gegen jede andere Mannschaft gespielt.

/1.5

/1.5

iv) Mindestens ein Spiel ist unentschieden ausgegangen.

/3

b) Gegeben sei nun die prädikatenlogische Signatur $\Sigma' = (V', F', P')$ mit Stelligkeitsfunktion ar' und

$$V' = \{x\}, \quad F' = \{f\}, \quad P' = \{R\}, \\ \text{ar}'(f) = 1, \quad \text{ar}'(R) = 2 .$$

und die Domäne $E = \{0, 1\}$. Betrachten Sie die Formel

$$\forall x (\neg R(x, x) \wedge R(f(x), x)) .$$

Geben Sie eine Abbildung M an, so dass die Interpretation (E, M) ein Modell dieser Formel ist.

$$M(f)(0) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$M(f)(1) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$M(R) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Geben Sie eine Abbildung N an, so dass die Interpretation (E, N) *kein* Modell dieser Formel ist.

$$N(f)(0) = \underline{\hspace{4cm}}$$

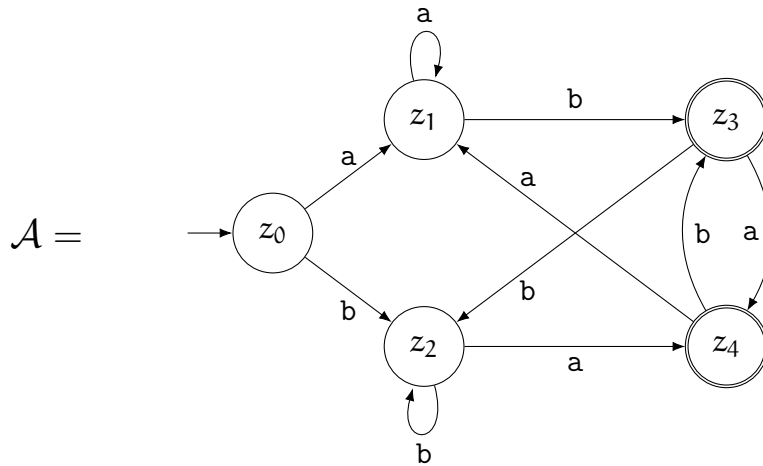
$$N(f)(1) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$N(R) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Aufgabe 3: Reguläre Sprachen (1.5 + 1.5 + 2 + 1 = 6 Punkte)

/ 6

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b\}$ und der folgende endliche Akzeptor \mathcal{A} . Sei außerdem $L = L(\mathcal{A})$ die von \mathcal{A} akzeptierte Sprache und $R(L) = \{R(w) \in X^* \mid w \in L\}$, wobei $R(w)$ die Umkehrung des Wortes w ist.



a) Geben Sie je ein Wort aus den folgenden Sprachen an:

/1.5

_____ $\in L \setminus R(L)$

_____ $\in R(L) \setminus L$

_____ $\in L \cap R(L)$

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck Q an, der die Sprache L beschreibt.

/1.5

$Q =$ _____

/2

c) Vervollständigen Sie untenstehende Grammatikdefinition zu einer rechtslinearen Grammatik, die die Sprache $R(L)$ erzeugt.

$G = (N, X, S, P)$ mit

$N = \{S, \underline{\hspace{2cm}}\}$

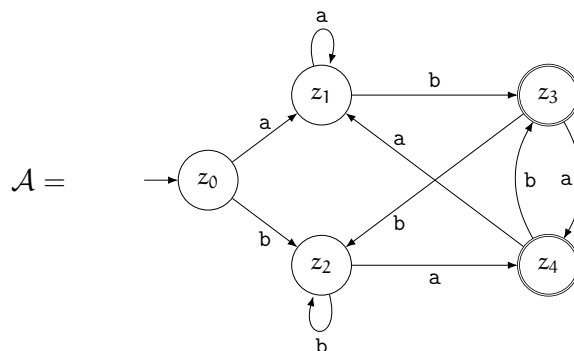
$P = \{$

}

/1

d) Geben Sie graphisch einen endlichen Akzeptor \mathcal{B} mit möglichst wenigen Zuständen an, so dass $L(\mathcal{B}) = \{w \in X^* \mid \text{es gibt } u \in X^* \text{ mit } wu \in L\}$.

Der Übersichtlichkeit halber ist hier der Automat \mathcal{A} vom Beginn der Aufgabenstellung Seite noch einmal wiederholt:



Aufgabe 4: Vollständige Induktion (1 + 1 + 4 = 6 Punkte)

/ 6

Eine aussagenlogische Formel, die weder die Negation \neg noch FALSCH enthält, heißt *negationsfrei*.

Der folgende Satz soll bewiesen werden:

Jede negationsfreie aussagenlogische Formel ist erfüllbar.

- a) Geben Sie ein Modell M der Formel $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3$ an.

/1

$M(P_1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $M(P_2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $M(P_3) = \underline{\hspace{2cm}}$

- b) Sei nun $A = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ eine nichtleere Menge von aussagenlogischen Variablen. Geben Sie eine Interpretation M_0 an, die Modell jeder negationsfreien Formel $F \in For_{AL}$ über A ist.

/1

- c) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion über der induktiven Struktur der aussagenlogischen Formeln über A , dass M_0 Modell jeder negationsfreien Formel $F \in For_{AL}$ über A ist.

/4

Alternativ können Sie vollständige Induktion über der Höhe des Kantorowitsch-Baumes von aussagenlogischen Formeln verwenden.

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

Aufgabe 5: Codierungen (1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9 Punkte)

/ 9

In dieser Aufgabe sind die Alphabete $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{0, 1\}$ gegeben. Sei $h^{**} : A^* \rightarrow B^*$ der durch $h : A \rightarrow B^*$ induzierte Homomorphismus. Dabei ist h gegeben durch

x	a	b	c	d
$h(x)$	0	10	110	111

a) Berechnen Sie $h^{**}(acdc)$

/1

b) Eine Funktion $l : B^* \rightarrow A^*$ heißt *Linksinverse* von h^{**} , wenn gilt, dass $l \circ h^{**} = I_{A^*}$. Geben Sie explizit eine Linksinverse von h^{**} an.

/1

$l(w) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$

c) Zeigen Sie: Eine Linksinverse zu h^{**} kann kein Homomorphismus sein

/2

/1

- d) Zeigen Sie: Die Linksinverse von h^{**} ist nicht eindeutig. Geben Sie dazu explizit eine weitere von Ihrer Lösung zu b) verschiedene Linksinverse von h^{**} an.

$$l'(w) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Sei weiterhin $B = \{0, 1\}$. Ein Homomorphismus $g : B^* \rightarrow B^*$ heißt *selbstinvers*, wenn für alle $w \in B^*$ gilt, dass $g(g(w)) = w$.

/2

- e) Beweisen Sie, dass für jeden selbstinversen Homomorphismus $g : B^* \rightarrow B^*$ gilt: $|g(x)| = 1$ für alle $x \in B$.

/2

- f) Geben Sie explizit alle selbstinversen Homomorphismen $g : B^* \rightarrow B^*$ an. Ein Beweis ist nicht gefordert.

Aufgabe 6: Relationen (3 + 2 = 5 Punkte)

/ 5

- a) Gegeben sei ein beliebiges Alphabet A . Wir betrachten die Relation $\sim \subseteq A^+ \times A^+$, definiert durch

$$w_1 \sim w_2 : \iff \text{es gibt } p \in A^+, u, v \in A^* \text{ mit } w_1 = pu \text{ und } w_2 = pv$$

für $w_1, w_2 \in A^+$.

Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

/3

/2

- b) Gegeben sei nun die Menge $M = \{0, 1, 2, 3\}$ und eine Relation $R \subseteq M \times M$. Der gerichtete Graph $G = (M, R)$ habe die Adjazenzmatrix

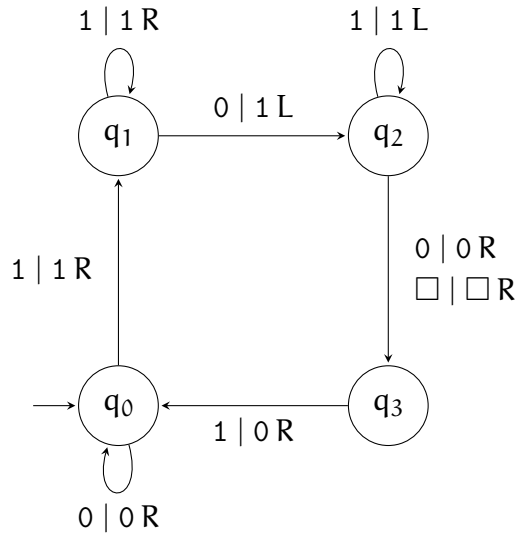
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ist R eine Halbordnung? Begründen Sie.

Aufgabe 7: Turingmaschinen (2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9 Punkte)

/ 9

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine \mathcal{M} mit Eingabealphabet $A = \{0, 1\}$ und Bandalphabet $B = \{0, 1, \square\}$. \square ist das Blankensymbol. Bei den Bewegungen des Lesekopfs steht L für „links“ und R für „rechts“.



Raster für Teilaufgabe a):

...	□	□	1	0	1	0	0	□	□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...
...	□								□	...

/2

a) Führen Sie \mathcal{M} für die Eingabe $w = 10100$ aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an,

- wenn \mathcal{M} von q_3 in den Zustand q_0 übergegangen ist, und
- nachdem \mathcal{M} gehalten hat (Endkonfiguration).

Markieren Sie jeweils die Position des Lesekopfs durch Einkreisen der Stelle auf dem Band.

Nutzen Sie dazu das Raster auf der vorherigen Seite. (Es werden nicht alle Zeilen des Rasters benötigt.)

/2

b) Sei $f_{\mathcal{M}}(w) \in (B \setminus \{\square\})^*$ die Ausgabe von \mathcal{M} nach Abarbeitung von $w \in A^*$ auf dem Arbeitsband (ohne Blanksymbole). Geben Sie einen endlichen Akzeptor \mathcal{B} an, der genau $L(\mathcal{B}) = f_{\mathcal{M}}(A^*) = \{w \in (B \setminus \{\square\})^* \mid w = f_{\mathcal{M}}(w') \text{ für ein } w' \in A^*\}$ akzeptiert. Verwenden Sie für \mathcal{B} höchstens 4 Zustände.

/2

c) Die Funktion

$$Time_{\mathcal{M}} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$n \mapsto$ maximale Anzahl der Schritte,
nach der \mathcal{M} bei Eingabe
eines Wortes der Länge n hält

ist Ihnen aus der Vorlesung bekannt. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ in Abhängigkeit der Länge n der Eingabewörter an, sodass $Time_{\mathcal{M}} \in \Theta(f)$.

d) Sei \mathcal{T} eine beliebige Turingmaschine über einem nicht-leeren Eingabealphabet C .

i) Zeigen Sie: Es gibt einen Turingmaschinenakzeptor \mathcal{U} , der die Sprache

/2

$$D_{\mathcal{T}} = \{w \in C^* \mid \mathcal{T} \text{ hält für die Eingabe } w\}$$

akzeptiert.

ii) Bedeutet dies, dass $D_{\mathcal{T}}$ für jede Turingmaschine \mathcal{T} entscheidbar ist? Begründen Sie!

/1

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

Matrikelnr:

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*