Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik

20. August 2024

Karlsruher Institut für Technologie

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	

INF
Erläuterung siehe unten

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

E-Mail-Adr.:		nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
erreichbare Punkte	12	9	8	7	7	9	8
erreichte Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 60	Note:	

INF = Klausur-Version mit 6 LP: Studiengang Informatik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Mathematik, Technomathematik, Lehramt

PH/GEO = Klausur-Version mit 4 LP: Physik, Geodäsie und Geoinformatik

Wichtige Hinweise

- Stellen Sie sicher, dass Sie die richtige Version der Klausur erhalten haben (INF oder PH/GEO auf der Titelseite)!
- Stellen Sie sicher, dass Ihre Klausur 18 Blätter umfasst.
- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch!
- Tragen Sie *nach der Einlesezeit* Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Matrikelnummer auf dem Titelblatt ein! Tragen Sie Ihre Matrikelnummer auch auf jedem Blatt ein!
- Wenn Sie Ihre Antwort nicht direkt bei der Aufgabenstellung aufschreiben, vermerken Sie unbedingt, wo Ihre Lösung steht.
- Sie können die Leerseiten und das angehängte freie Blatt für Antworten nutzen, falls der Platz bei der Aufgabenstellung nicht ausreicht.

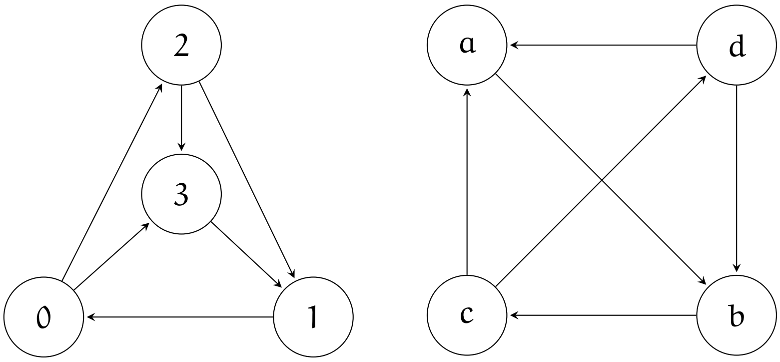
  Sie können den Platz auch für Notizen, Skizzen etc. nutzen.

  Kennzeichnen Sie deutlich, welche Angaben bewertet werden sollen!
- Weiteres Leerpapier erhalten Sie bei Bedarf auf Nachfrage von der Aufsicht.
- Bitte bleiben Sie bis zum Ende der Bearbeitungszeit am Platz.
- Aufsichtspersonen werden nur organisatorische und keine inhaltlichen Fragen beantworten.

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (1 + 3 + 2 + 2 + 1 + 3 = 12 Punkte) / 12

a) In der ersten Teilaufgabe geht es um Graphisomorphismen.

(i) Sind die unten abgebildeten Graphen G_1 und G_2 isomorph? /1
Wenn ja, geben Sie einen passenden Isomorphismus an.
Wenn nein, begründen Sie, warum die Graphen nicht isomorph sind.



G_1 G_2

(ii) Seien G und G' isomorphe Graphen. /3
Zeigen oder widerlegen Sie: G is genau dann streng zusammenhängend, wenn G' streng zusammenhängend ist.

/2

b) Geben Sie grafisch einen Mealy-Automaten an, der bei Eingabe eines beliebigen Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ das Wort $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ ausgibt, das entsteht, wenn aus w alle Vorkommen des Zeichens $\mathtt{a}$ außer dem ersten entfernt werden.
Verwenden Sie höchstens 3 Zustände!

c) Gegeben seien Funktionen $f, g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$.

/2

(i) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $f(x) \in O(g(x))$, dann ist auch $f(x) \cdot h(x) \in O(g(x) \cdot h(x))$.

/1

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $f(x) \in O(g(x))$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $f(n_0) \leq g(n_0)$.

d) Gegeben seien die Variablen x, y, z und der nicht-verzweigende Algorithmus

/3

$$y \leftarrow x * x \,;\, x \leftarrow 4 * y \,;\, z \leftarrow x + y \;.$$

Wir wollen untersuchen, unter welcher Bedingung das Ergebnis in z einen Wert größer als 45 annimmt.

Wenden Sie dazu Regeln des Hoare-Kalküls an, um eine Vorbedingung (2) zur angegebenen Nachbedingung (5) zu finden. Geben Sie dazu auch die Zwischenbedingungen (2)-(4) an. Vereinfachen Sie schließlich die erhaltene Vorbedingung in (2) ab, um eine besser lesbare äquivalente Vorbedingung zu erhalten. Ergänzen Sie dafür (1) um eine Konstante.

Eingabe: $x, y, z \in \mathbb{N}_+$

(1) $\{x > \_\_\_\_\_\}$

(2) $\{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \}$

$y \leftarrow x * x$

(3) $\{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \}$

$x \leftarrow 4 * y$;

(4) $\{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \}$

$z \leftarrow x + y$

(5) $\{ z > 45 \}$

Lösung 1

a) (i) *Erinnerung:* Ein Graphisomorphismus ist eine Bijektion $\sigma : V_1 \to V_2$ auf den Kantenmenge, so dass

$$(x, y) \in E_1 \iff (\sigma(x), \sigma(y)) \in E_2 \qquad \text{für alle } x, y \in V_1 \ .$$

Eine mögliche Lösung: G_1 und G_2 sind isomorph. Die bijektive Abbildung

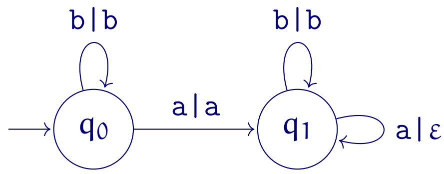
$$\sigma = \{(0, c), (3, a), (1, b), (2, d)\}$$

ist ein Graphisomorphismus.

(ii) Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$. Wenn G und G' isomorph sind, dann gibt es Graphisomorphie $\gamma : V_1 \to V_2$. Für zwei bel. Knoten aus G gibt es eine Kante gdw. es unter γ eine Kante in G' gibt. Daraus folgt, dass es einen Pfad in G zwischen a und b gibt, genau dann wenn es einen Pfad in G' zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ gibt. Strenger Zusammenhang: Für zwei beliebige $u, v \in V$ gibt es einen Pfad $p = (q_1, ..., q_n)$ von u nach v. Wegen der Isomorphie gibt es einen Pfad p' von $\gamma(u)$ nach $\gamma(v)$ mit $p' = (\gamma(q_1), ..., \gamma(q_n))$.

Das selbe Argument kann für die Rückrichtung verwendet werden mit der Umkehrfunktion γ^{-1}.

b)



c) (i) Wir zeigen die Aussage.

Seien dazu f, g, h wie in der Aufgabenstellung gegeben und $f(x) \in O(g(x))$. Nach Definition von $f(x) \in O(g(x))$ gilt dann

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 . \forall n \geq n_0 . \ f(n) \leq c \cdot g(n) \ .$$

Da $h(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ kann man beide Seiten der Ungleichung $f(n) \leq c \cdot g(n)$ mit $h(n)$ multiplizieren, ohne dass sich die Richtung der Ungleichung verändert. Damit gilt dann auch

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 . \forall n \geq n_0 . f(n) \cdot h(n) \leq c \cdot g(n) \cdot h(n) \ ,$$

was $f(x) \cdot h(x) \in O(g(x) \cdot h(x))$ entspricht.

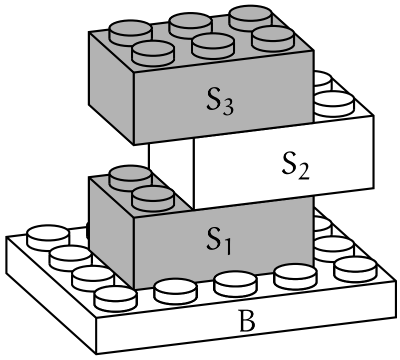
(ii) Wir geben ein Gegenbeispiel an:
Sei $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x$. Es gilt offensichtlich
$f(x) \in O(g(x))$, aber für alle Werte von x ist
$f(x) = x + 1 > x = g(x)$.

d) **Eingabe:** $x, y \in \mathbb{N}_+$
(1) $\{x > 3\}$
(2) $\{4 \cdot x \cdot x + x \cdot x > 45\}$
$y \leftarrow x * x$
(3) $\{4 \cdot y + y > 45\}$
$x \leftarrow 4 * y$
(4) $\{x + y > 45\}$
$z \leftarrow x + y$
(5) $\{ z > 45 \}$

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 2: Prädikatenlogik (1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 3 = 9 Punkte) / 9

Für diese Aufgaben betrachten wir ein Universum D aus zu (einem oder mehreren) Türmen aufgebauten Legobausteinen. Jeder Stein hat höchstens einen Stein direkt über sich und höchstens einen Stein direkt unter sich im Turm. Jeder Stein ist entweder weiß oder grau. Der unterste Stein eines Turm wird Basis genannt. B ist im Bild rechts die Basis für alle abgebildeten Steine.



Die betrachtete Signatur ist $\Sigma = (\{x, y, z\}, \{b\}, \{G, T\}, ar)$. b ist ein einstelliges Funktionssymbol, G ist ein einstelliges und T ein zweistelliges Relationssymbol. x, y und z sind Variablensymbole.

Wir betrachten eine Interpretation I, in der die Symbole Folgendes bedeuten:

$I(b)(s)$	bezeichnet die Basis des Turms, in dem s liegt.
$s \in I(G)$	genau dann, wenn s ein grauer Stein ist.
$(s, t) \in I(T)$	genau dann, wenn s der Stein direkt über t im Turm ist.

a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache in Prädikatenlogik mit Gleichheit:

(i) In keinem Turm stehen stehen zwei graue Steine direkt aufeinander. /1.5

(ii) Es gibt einen Turm, bei dem der Stein direkt über dem Basisstein nicht grau ist. /1.5

/1.5

(iii) Es gibt einen Turm, der nur aus einem einzigen Stein besteht.

/1.5

b) Geben Sie für folgende prädikatenlogische Formel die anschauliche Bedeutung in natürlicher Sprache an:

$$\exists x \forall y \big(b(x) \doteq b(y)\big)$$

/3

c) Sei nun das Universum $D = \{S_1, S_2, S_3\}$ gegeben; es gebe also genau 3 Legosteine. Wir betrachten die Formel $F = \forall x(G(x) \to G(b(x)))$.

i) Hat F ein Modell?

☐ Nein.

☐ Ja, und zwar Folgendes:

$I(G) =$ ☐

$I(b)(S_1) =$ ☐

$I(b)(S_2) =$ ☐

$I(b)(S_3) =$ ☐

ii) Gibt es eine Interpreation, die F nicht erfüllt?

☐ Nein.

☐ Ja, und zwar Folgende:

$I'(G) =$ ☐

$I'(b)(S_1) =$ ☐

$I'(b)(S_2) =$ ☐

$I'(b)(S_3) =$ ☐

Da T nicht in der Formel vorkommt, müssen Sie auch keine Belegung dafür angeben.

Lösung 2

a) (i) $\forall x \forall y (T(x, y) \rightarrow \neg G(x) \vee \neg G(y))$

(ii) $\exists x (\neg G(x) \wedge T(x, b(x)))$

(iii) $\exists x \forall y (b(y) \doteq x \rightarrow y \doteq x)$

b) „Alle Steine stehen im selben einen Turm.“

c) (i) Ja, es gibt ein Modell:

$$
\begin{aligned}
I(G) &= \{\} \\
I(b)(S_1) &= S_1 \\
I(b)(S_2) &= S_1 \\
I(b)(S_3) &= S_1
\end{aligned}
$$

(ii) Ja, es gibt eine falsifizierende Belegung:

$$
\begin{aligned}
I(G) &= \{S_2\} \\
I(b)(S_1) &= S_1 \\
I(b)(S_2) &= S_1 \\
I(b)(S_3) &= S_1
\end{aligned}
$$

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 3: Reguläre Sprachen (1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 8 Punkte) / 8

Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und der reguläre Ausdruck

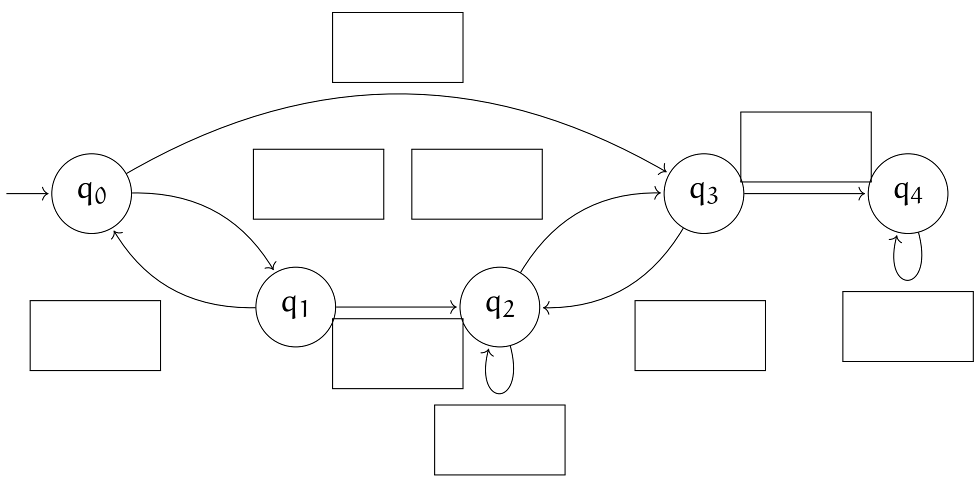
$$R = \mathtt{(ab)*(a|ba)*}$$

a) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G_R an, so dass $L(G_R) = L(R)$.[1] /1

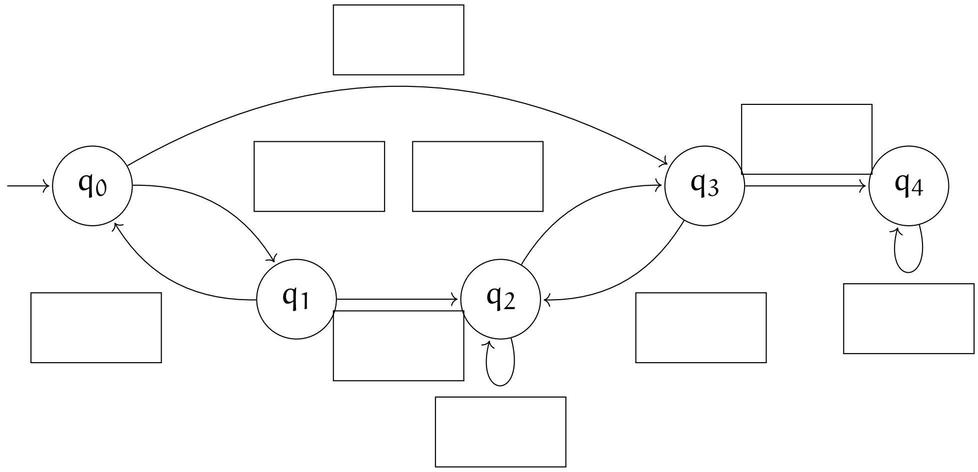
b) Ergänzen Sie folgenden endlichen Akzeptor K, so dass $L(K) = L(R)$ gilt. Ergänzen Sie dazu /3

(a) jede Kante mit mind. einem Symbol aus A (in den Kästchen) und

(b) markieren Sie alle akzeptierenden Zustände (mit der üblichen Notation).



Sie können auch die nachfolgend abgedruckte Kopie von K verwenden, um Ihre Lösung für Teilaufgabe b) anzugeben.
Wenn Sie beide Skizzen verwenden, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Lösung gewertet werden soll!



c) Gegeben sind die beiden Grammatiken

$$G_1 = \big(\{S\},\ \{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\ S,\ \{S \to aSb \mid \varepsilon\}\big) \text{ und}$$
$$G_2 = \big(\{S\},\ \{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\ S,\ \{S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}\big)\ .$$

/2

(i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an mit $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

/1

(ii) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G' an mit $L(G') = L(G_1) \cap L(G_2)$.

d) Gegeben sei ein beliebiger endlicher Akzeptor H über dem Alphabet A. Geben Sie an, wie ein endlicher Akzeptor J mit $L(J) = A^* \setminus L(H)$ von H ausgehend erstellt werden kann.

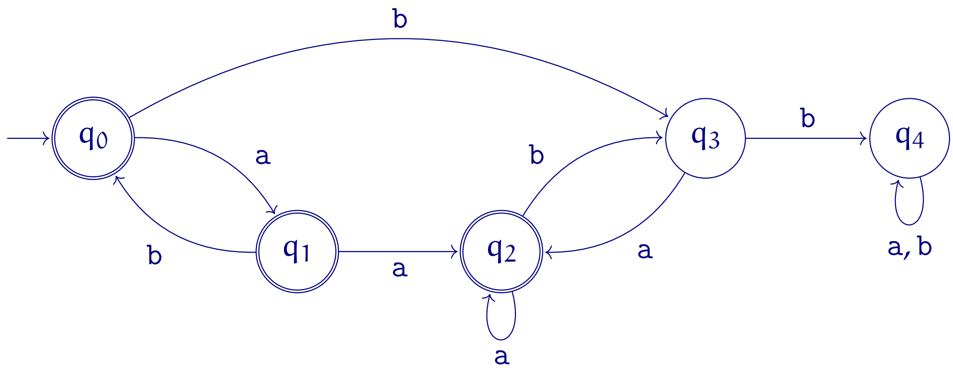
/1

Lösung 3

a) $G_R = (\{S, T\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to abS \mid T \mid \epsilon \\
T &\to aT \mid baT \mid \epsilon\}
\end{aligned}
$$

b)



c) (i) $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to S_1 \mid S_2 \\
S_1 &\to aS_1b \mid \epsilon \\
S_2 &\to aS_2a \mid bS_2b \mid \epsilon\}
\end{aligned}
$$

(ii) $G' = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$P = \{S \to \epsilon\}$$

d) Sei $H = (Z, z_0, A, f, F)$, dann ist $J = (Z, z_0, A, f, Z \setminus F)$

Aufgabe 4: Vollständige Induktion (1 + 1 + 5 = 7 Punkte)

/ 7

In dieser Aufgabe betrachten wir *Zwei-Ausdrücke*: Dies sind arithmetische Ausdrücke über natürlichen Zahlen, in denen nur

- der Wert 2,
- die Addition + (als binärer Operator),
- die Multiplikation $*$ (als binärer Operator), sowie
- Klammern `(`, `)`

vorkommen. Es gelten die üblichen Regeln für das Einsparen von Klammern.

a) Zeichnen Sie den Kantorowitsch-Baum (= abstrakten Syntaxbaum) für den Zwei-Ausdruck `(2*2)+(2+2)*2`. /1

b) Geben Sie einen Zwei-Ausdruck an, dessen Kantorowitsch-Baum eine Höhe von 3 hat und der zu 256 auswertet. /1

Hinweis. Zur Erinnerung: Die Höhe eines Kantorowitsch-Baumes ist die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.

/5

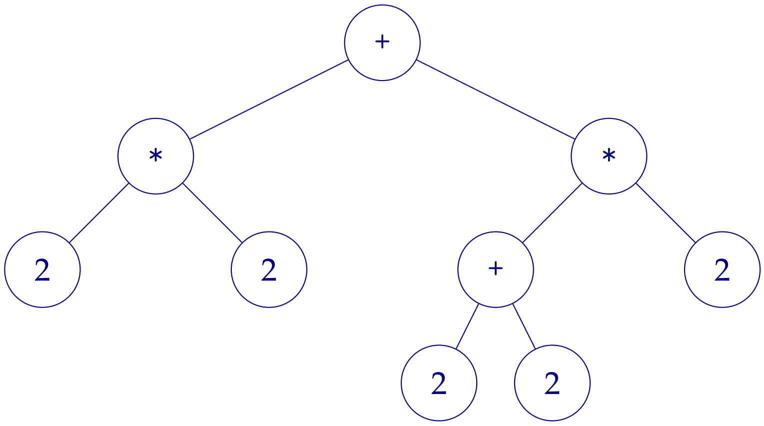
c) Beweisen Sie mit Hilfe struktureller Induktion über Zwei-Ausdrücken:

> Sei a ein Zwei-Ausdruck, dessen Kantorowitsch-Baum die Höhe h hat. Dann ist der Wert $w(a)$ von a höchstens $2^{(2^h)}$.

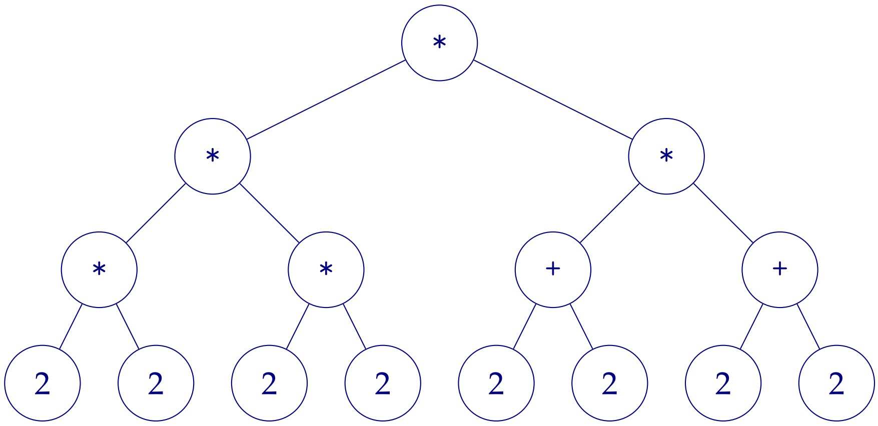
Dabei bezeichnet w die Funktion, die jedem Zwei-Ausdruck ihren Wert zuordnet.

Lösung 4

a)



b)



In der Ebene über den Blättern kann + oder $*$ verwendet werden.

c) Es bezeichne $w(A)$ den Wert des Zweiausdrucks A.

Induktionsanfang: Der einzige Basisfall ist der Zweiausdruck 2, da er keine Kind-Ausdrücke besitzt. Die Höhe des Baumes ist dabei $h = 0$. Es gilt: $2^{(2^0)} = 2 = w(2)$. Der Induktionsanfang ist erfüllt.

Induktionsschritt: Sei A ein zusammengesetzter Zweiausdruck der Höhe $h \geq 1$. Dann gibt es zwei Unterausdrücke A_1, A_2, deren Höhe echt kleiner als h ist. Die Werte von A_1 und A_2 sind nach Induktionsvoraussetzung damit höchstens $2^{2^{h-1}}$.

Multiplikation Falls $A = A_1 * A_2$ so gilt für $w(A) = w(A_1) \cdot w(A_2)$. Nach Induktionsvoraussetzung also $w(A) \leq 2^{2^{h-1}} \cdot 2^{2^{h-1}} = 2^{2^{h-1}+2^{h-1}} \leq 2^{2^h}$, was zu zeigen war.

Addition Falls $A = A_1 + A_2$ so gilt für $w(A) = w(A_1) + w(A_2)$. Nach Induktionsvoraussetzung also

$w(A) \leq 2^{2^{h-1}} + 2^{2^{h-1}} = 2^{2^{h-1}+1} \overset{(\dagger)}{\leq} 2^{2^{h-1}+2^{h-1}} \leq 2^{2^h}$, was zu zeigen war. Die Ungleichheit $(\dagger)$ gilt, da für $h \geq 1$ gilt, dass $1 \leq 2^{h-1}$.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 5: Codierungen (1 + 2 + 0.5 + 1.5 + 1 + 1 = 7 Punkte)

/ 7

a) Sei $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{a, b, c, d, e\}$.

(i) Sei $w = a^n b^n c^n \in A^*$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Wie viele verschiedene Huffman-Codierungen $h^{**} : A^* \to \{0, 1\}^*$ für w gibt es?

/1

(ii) Sei $w' = e^4 d^2 a c^3 b d e^3 \in B$. Erstellen Sie einen Huffman-Baum für w'.

/2

(iii) Geben Sie die Länge $|h^{**}(w')|$ der dazugehörigen Huffman-Codierung an.

/0.5

b) Sei $f : A^* \to A^*$ die Funktion, die jedes Zeichen mit ungeradem Index aus dem Argument löscht. Z. B. ist
$f(ab) = a,\ f(abc) = ac,\ f(abccba) = acb.$

/1.5

(i) Vervollständigen Sie die untenstehende Definition von f.

$$f(w) = \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}}, & \text{falls } w = \varepsilon \\ \underline{\hspace{3cm}}, & \text{falls } w = w'x \text{ wobei } w' \in A^*,\ x \in A,\ |w'| \text{ gerade} \\ \underline{\hspace{3cm}}, & \text{falls } w = w'x \text{ wobei } w' \in A^*,\ x \in A,\ |w'| \text{ ungerade} \end{cases}$$

/1

(ii) Ist f ein Homomorphismus? Beweisen oder widerlegen Sie.

/1

(iii) Sei nun $g^{**} : B^* \to B^*$ ein Homomorphismus, so dass $g^{**}(ab) = cd$ und so dass für alle $w \in B$ gilt $g^{**}(g^{**}(w)) = w$. Geben Sie eine Funktion $g : B \to B^*$ an, die g^{**} induziert.

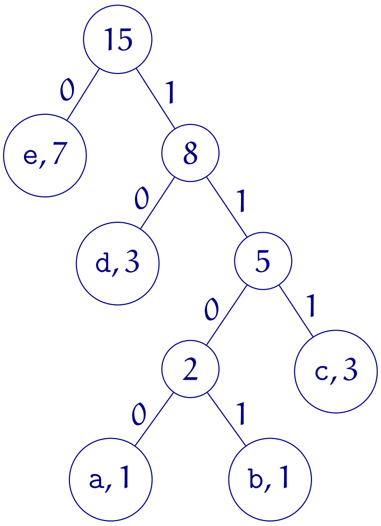
$g(a) =$ __________, $g(b) =$ __________, $g(c) =$ __________,

$g(d) =$ __________, $g(e) =$ __________

Lösung 5

a) (i) 12

(ii)



(iii) 30

b) (i)

$$f(w) = \begin{cases} \varepsilon & , \text{ falls } w = \varepsilon \\ f(w')x & , \text{ falls } w = w'x \text{ wobei } w' \in A^*,\ x \in A,\ |w'| \text{ gerade} \\ f(w') & , \text{ falls } w = w'x \text{ wobei } w' \in A^*,\ x \in A,\ |w'| \text{ ungerade} \end{cases}$$

(ii) Im Beispiel von oben $f(ab) = a$ gilt $f(a) = a$ und $f(b) = b$. Es ist also $f(a) \cdot f(b) = ab$ verschieden von $f(ab) = a$, was in einem Homomorphismus nicht sein kann.

(iii) $g(a) = c,\ g(b) = d,\ g(c) = a,$

$g(d) = b,\ g(e) = e$

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen. Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 6: Relationen & Graphen (1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9 Punkte) / 9

Sei im Folgenden $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) (i) Geben Sie eine Relation $R_a \subseteq M^2$ über M an, die sowohl eine **Äquivalenzrelation** als auch eine **Halbordnung** auf M ist. /1

(ii) Zeigen Sie, dass die Relation R_a aus der Teilaufgabe (i) die einzige Relation ist, die sowohl Äquivalenzrelation als auch Halbordung auf M ist. /2

(iii) Geben Sie für die Menge $N = \{0, 1\}$ eine Relation $S \subseteq N^2$ an, die nicht transitiv ist. Begründen Sie kurz. /1

b) Zur Erinnerung: Wenn für ein Element $u \in M$ gilt, dass

$$(u, x) \in R \text{ für alle } x \in M \quad ,$$

dann heißt u *kleinstes Element* von M.

(i) Im Folgenden sind drei Matritzen A_1, A_2, A_3 gegeben. Jede Matrix A_i ist die Adjazenzmatrix eines Graphen, dessen Kantenmenge eine Halbordnung $R_i \subseteq \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ ist.

Hinweis: Eine 1 an Position $(0, 1)$, also in der ersten Zeile und zweiten Spalte, gibt an, dass $(0, 1) \in R$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

/1

i. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Halbordnung R_1.

/1

ii. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Halbordnung R_2.

/1

iii. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Halbordnung R_3.

/2

iv. Markieren Sie in den Hasse-Diagrammen die kleinsten Elemente durch den Buchstaben **K** an den entsprechenden Knoten.

Lösung 6

a) (i) Die Gleichheitsrelation $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

(ii) Wenn R beide Eigenschaften hat, dann muss für ein beliebiges Paar $(x,y) \in R$ mit $x \neq y$ gelten:

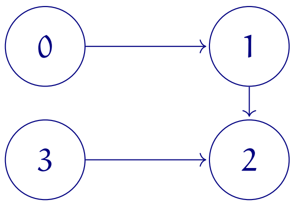
- $(y,x) \in R$ wegen der Symmetrie der Äquivalenzrelation
- $(y,x) \notin R$ wegen der Antisymmetrie der Ordnungsrelation

Also muss für ein solches Paar (x,y) mit $x \neq y$ gelten, dass $(x,y) \notin R$, um diesen Widerspruch zu vermeiden.

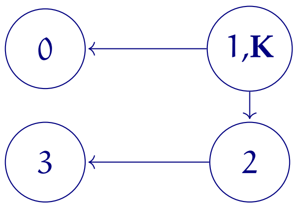
Wegen der Reflexivität einer Äquivalenzrelation muss aber für jedes Paar (x,x) gelten, dass $(x,x) \in R$. Eine kleinere Relation mit der gewünschten Eigenschaft kann es also nicht geben.

(iii) Sei $S = \{(0,1),(1,0)\}$. Da $(0,1) \in S$ und $(1,0) \in S$, aber nicht $(0,0) \in S$, ist S nicht transitiv.

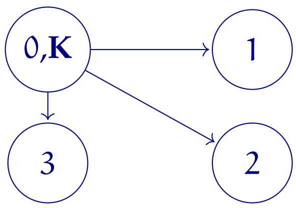
b) (i)



(ii)



(iii)

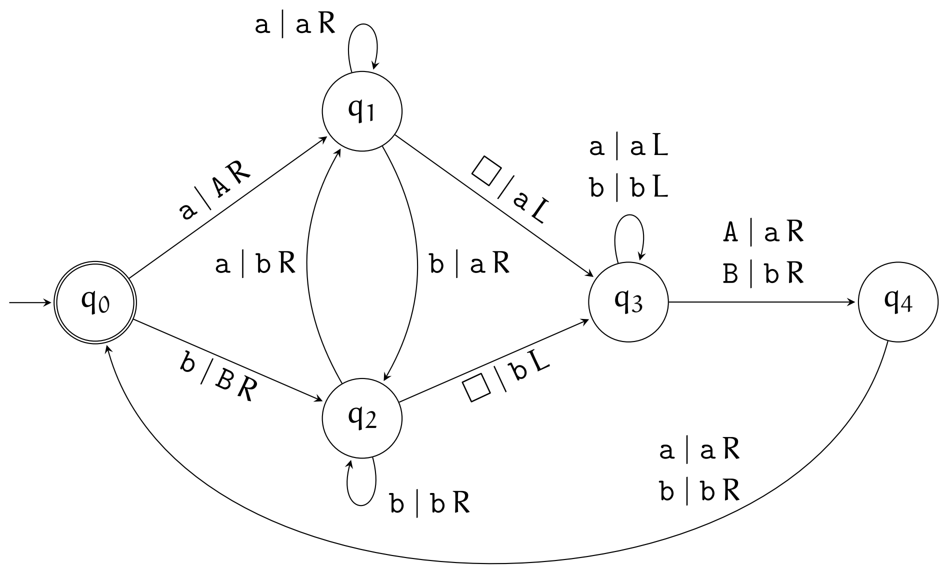


Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 7: Turingmaschinen (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

/ 8

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Eingabealphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und Bandalphabet $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \square\}$. $\square$ ist das Blanksymbol. Bei den Bewegungen des Lesekopfs steht L für „links“ und R für „rechts“ und N für „nicht bewegen“.



Raster für Teilaufgabe a):

… □	□	a	b	a	□	□	□	□	□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …
… □									□ …

/2

a) Führen Sie $\mathcal{M}$ für die Eingabe $w = \texttt{aba}$ aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an,

- wenn $\mathcal{M}$ von q_4 in den Zustand q_0 übergegangen ist, und
- nachdem $\mathcal{M}$ gehalten hat (Endkonfiguration).

Markieren Sie jeweils die Position des Lesekopfs durch Einkreisen der Stelle auf dem Band.

Nutzen Sie dazu das Raster auf der vorherigen Seite. (Es werden nicht alle Zeilen des Rasters benötigt.)

/2

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G_{\mathcal{M}}$ an, so dass $L(G_{\mathcal{M}}) = \{w \mid w = f_{\mathcal{M}}(u) \text{ für } u \in A^*\}$.

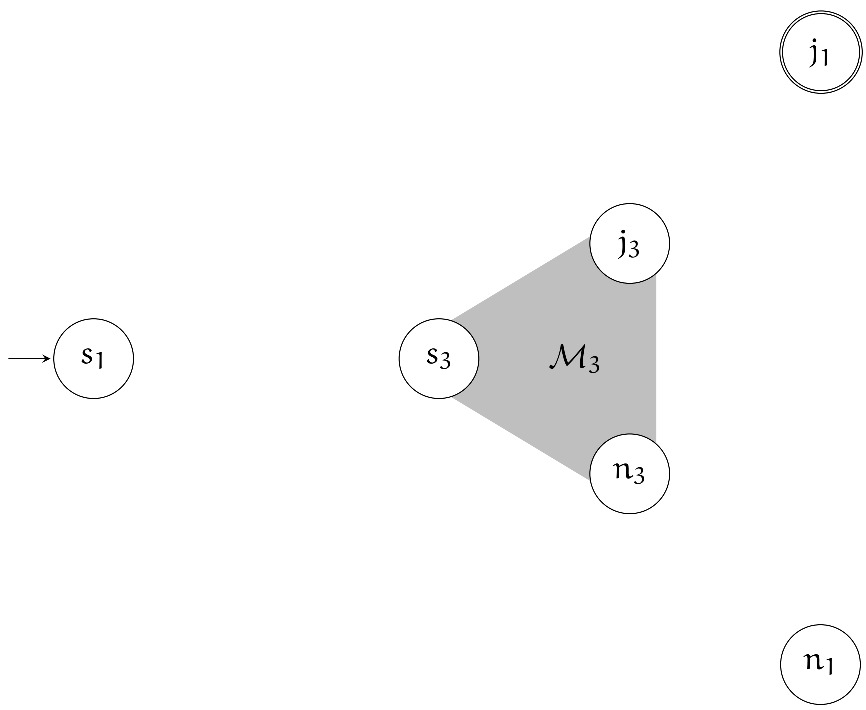
Im Folgenden sollen Sie mit *Unique-Termination-Turingakzeptoren* (UTTA) arbeiten. Falls ein UTTA hält, so befindet er sich in der Endkonfiguration in einem von zwei Zuständen: entweder im akzeptierenden Zustand j oder im nicht-akzeptierenden Zustand n, aber niemals in einem anderen Zustand.

c) Gegeben sind die Alphabete $A_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $A_2 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Das Bandalphabet ist $B = A_1 \cup A_2 \cup \{\square\}$.

Wir betrachten zwei Sprachen $L_1 \subseteq A_1^+$, $L_2 \subseteq A_2^+$ und ihre Vereinigung $L_3 = L_1 \cup L_2$.

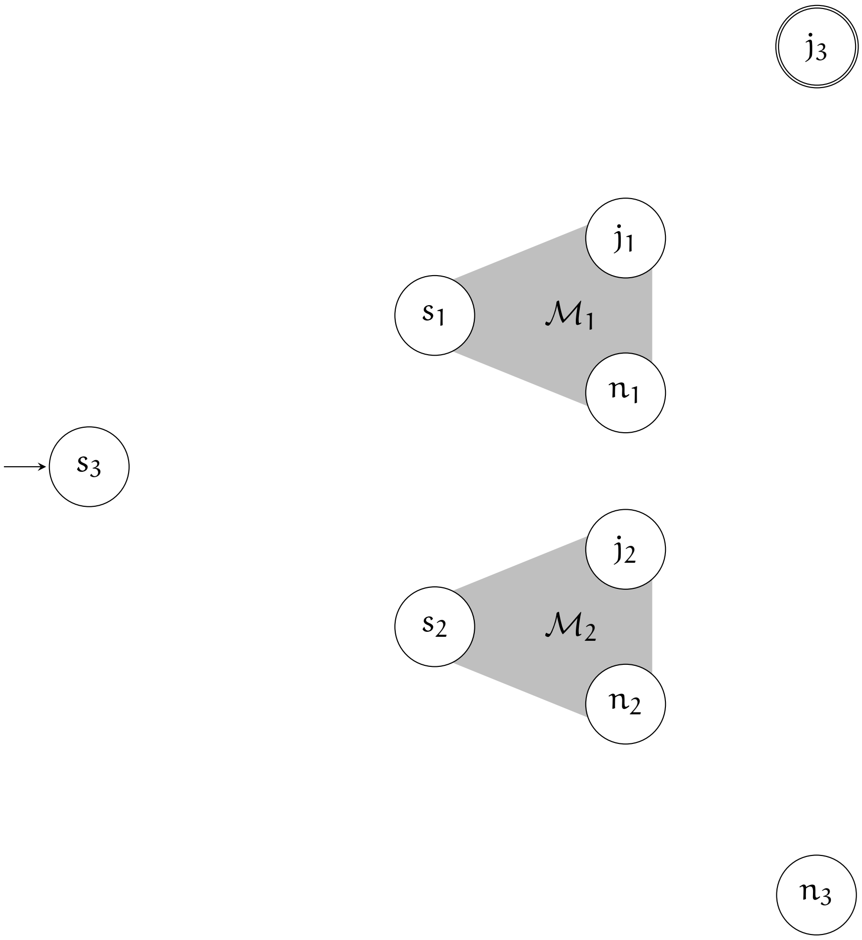
(i) Sei $\mathcal{M}_3$ eine UTTA, die L_3 entscheidet.
Konstruieren Sie unter Verwendung von $\mathcal{M}_3$ eine UTTA, die L_1 entscheidet.
Ergänzen Sie dazu im untenstehenden Schema notwendige Zustände und Zustandsübergänge.
Verwenden Sie höchstens 2 zusätzliche Zustände!

	/2



/2

(ii) Sei $\mathcal{M}_1$ eine UTTA, die L_1 entscheidet und $\mathcal{M}_2$ eine UTTA, die L_2 entscheidet.
Konstruieren Sie unter Verwendung von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ eine UTTA, die L_3 entscheidet.
Ergänzen Sie dazu im untenstehenden Schema notwendige Zustände und Zustandsübergänge.
Verwenden Sie höchstens 2 zusätzliche Zustände!



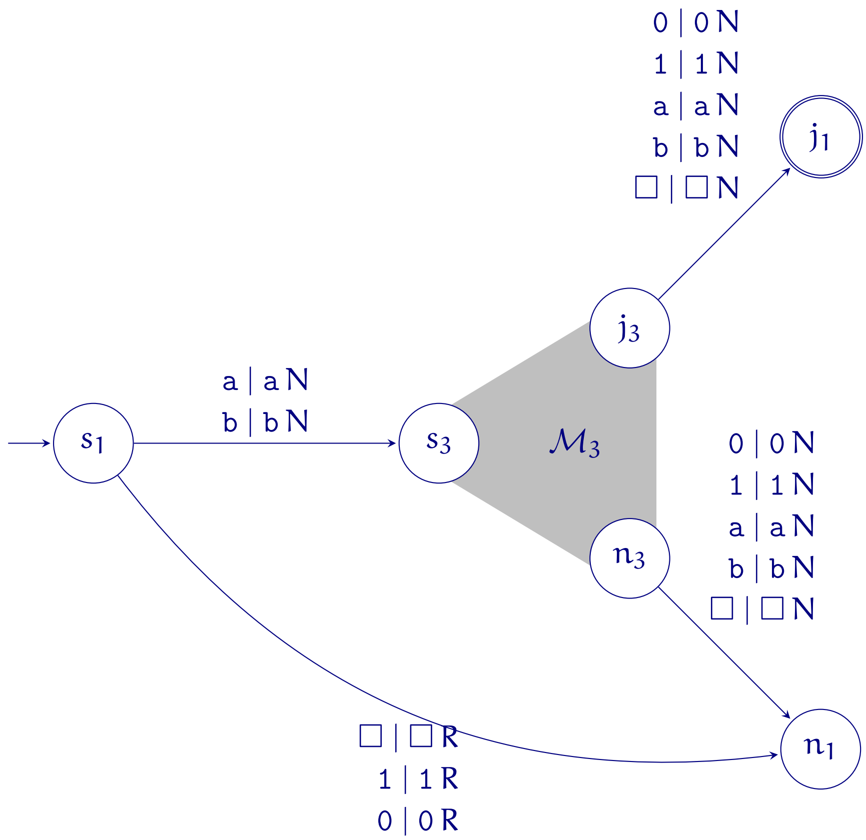
Lösung 7

a) **Raster für Teilaufgabe a):**

… □	□	a	b	a	□	□	□	□	□ …
… □	□	a	a	b	a	□	□	□	□ …
… □	□	a	a	b	b	a	□	□	□ …
… □	□	a	a	b	b	a	a	□	□ …

b) $G_{\mathcal{M}} = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$
$P = \{S \rightarrow aaS \mid bbS \mid \epsilon\}$

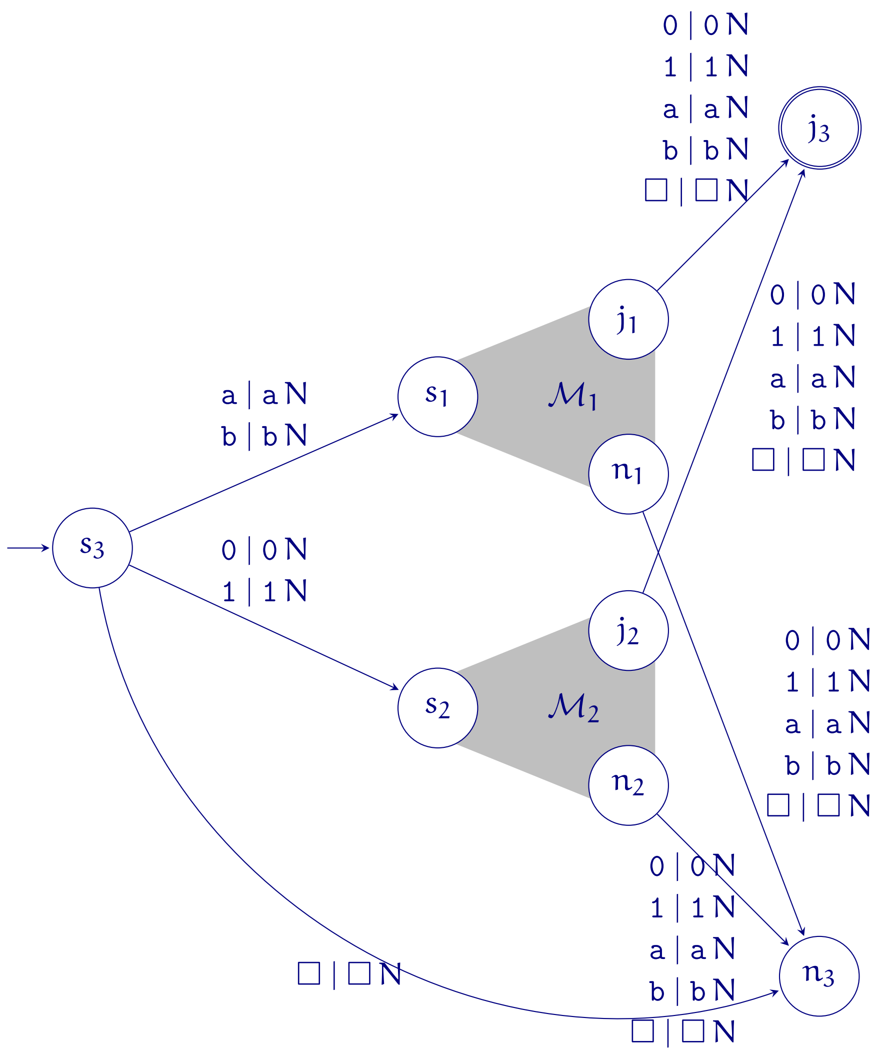
c) (i)



Erläuterungen:

Die Turingmaschine $\mathcal{M}_3$ entscheidet $L_3 = L_1 \cup L_2$. Da $L_2 \subseteq A_2^*$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, gilt $L_3 \cap A_1^* = L_1$

(ii)



Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!