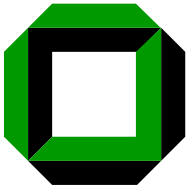
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Sudoku

Vervollständigen Sie das Sudoku so, daß

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- in jeder der neun Spalten
- in jeder der neun Reihen
- und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

Sudoku

Lösung

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, daß $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D^9_{9,1}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, daß die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

sagt, daß die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{2,1} \vee D^1_{2,2} \vee D^1_{2,3} \vee D^1_{3,1} \vee D^1_{3,2} \vee D^1_{3,3}$$

sagt, daß die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muß.

Zusätzliche AL-Formeln

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muß noch sagen, daß auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^2_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^3_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^4_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^5_{1,1})$,
$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^6_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^7_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^8_{1,1})$, $\neg(D^1_{1,1} \wedge D^9_{1,1})$,
$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^3_{1,1})$, $\neg(D^2_{1,1} \wedge D^4_{1,1})$, $\neg(D^2_{1,1} \wedge D^5_{1,1})$, $\neg(D^2_{1,1} \wedge D^6_{1,1})$,
$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^7_{1,1})$, $\neg(D^2_{1,1} \wedge D^8_{1,1})$, $\neg(D^2_{1,1} \wedge D^9_{1,1})$, $\neg(D^3_{1,1} \wedge D^4_{1,1})$,
usw. . .

Zusätzliche AL-Formeln

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Vokabular der Aussagenlogik
Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn ... dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- *(,)* die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik
Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der

Formeln über Σ

induktiv definiert durch

1. $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
   $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
   $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
2. wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch

   $\neg A$
   $(A \wedge B)$
   $(A \vee B)$
   $(A \rightarrow B)$
   $(A \leftrightarrow B)$

   Elemente von $For0_\Sigma$

Übungsaufgaben

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion:

1. Ist $A \in For0_\Sigma$ und sind B, C Teilformeln von A, dann gilt
   - entweder C ist Teilformel von B
   - oder B ist echte Teilformel von C
   - oder B, C liegen disjunkt.
2. Ist B Teilformel von $A \in For0_\Sigma$ und zugleich Präfix von A, dann sind A, B identisch.
   Volle Klammerung vorausgesetzt.

Semantik der Aussagenlogik

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine Interpretation über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \to \{W, F\}.$$

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige Auswertung der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \to \{W, F\}$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(\mathbf{1}) &= W \\ val_I(\mathbf{0}) &= F \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \text{für jedes } P \in \Sigma \end{aligned}$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	val_I $(A \wedge B)$	val_I $(A \vee B)$	val_I $(A \to B)$	val_I $(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

1	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \to (A \vee B)$	*nein*
4	$(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$	*nein*
5	$(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$	*ja*

Logische Grundbegriffe

Definition

1. Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
2. Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
3. $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
   gdw
   $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
4. $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
   gdw
   es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

1. $M \models A$ lies: aus M folgt A
   gdw
   Jedes Modell von M ist auch Modell von A.
2. $A, B \in For0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
   gdw
   $A \models_\Sigma B$ und $B \models_\Sigma A$

Einige Beispiele allgemeingültiger Formeln

$A \to A$	Selbstimplikation
$\neg A \vee A$	Tertium non datur
$A \to (B \to A)$	Abschwächung
$\mathbf{0} \to A$	Ex falso quodlibet
$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität

Einige Beispiele allgemeingültiger Formeln (Fortsetzung)

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow$	
$((A \to B) \to (A \to C))$	Verteilen
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgan
$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	De Morgan

Einfache Sätze

Theorem

1. A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
2. $\models A$ gdw A ist allgemeingültig.
3. $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar.
4. $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
5. $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
6. A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig.

Das Craigsche Interpolationslemma

Seien A, B aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \rightarrow B$$

dann gibt es eine Formel C mit

$$\models A \rightarrow C \quad \text{und} \quad \models C \rightarrow B,$$

so daß in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.
An eventuelle Vorkommen von $\mathbf{1}$ und $\mathbf{0}$ in C werden keine Einschränkungen gemacht.

Interpolationslemma: Beweis

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1,\ldots,c_n) \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} A[c_1, \ldots, c_n]$$

Offensichtlich kommen in C nur noch aussagenlogische Atome vor, die A und B gemeinsam sind.

Beweis (Forts. 1)

Sei jetzt I eine Interpretation mit $val_I(A) = W$,
dann gilt auch

$$val_I(A[c_1, \ldots, c_n]) = W$$

für $c_i = I(P_i)$.
Damit gilt auch $val_I(C) = W$.
Insgesamt haben wir also schon $\models A \rightarrow C$ gezeigt.

Beweis (Forts. 2)

Sei jetzt I eine Interpretation mit $val_I(C) = W$.
Für (mindestens) eine Wahl von Konstanten $(c_1, \ldots, c_n) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}^n$ gilt also $val_I(A[c_1, \ldots, c_n]) = W$.
Dieselbe Aussage können wir auch anders schreiben: Wir definieren die Belegung J durch

$$J(P) = \begin{cases} W & \text{falls } P = P_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ mit } c_i = \mathbf{1} \\ F & \text{falls } P = P_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ mit } c_i = \mathbf{0} \\ I(P) & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $val_J(A) = W$
Nach der Voraussetzung gilt also auch $val_J(B) = W$.
Da I und J sich nur unterscheiden für die aussagenlogische Atome, die nicht in B vorkommen, gilt auch

$$val_I(B) = W.$$

Revival des Craigschen Interpolationslemmas

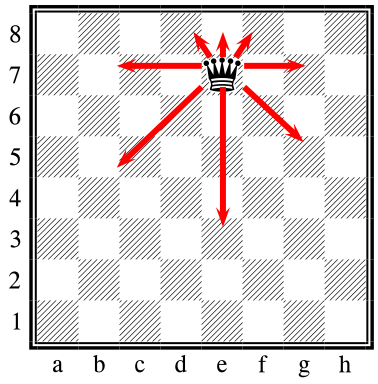
Anwendung des Interpolationslemmas in der Modellprüfung (model checking) durch Ken McMillan.

siehe
http://www.cs.utah.edu/tphols2004/mcmillan.abstract.html

Interpolation and SAT-based Model Checking
K.L. McMillan
Proceedings Computer Aided Verification (CAV03)

Das 8-Damen-Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems