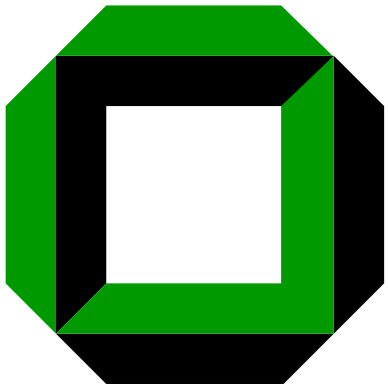
# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls} \quad P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls} \quad P_1 = 1 \end{cases}$$

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls} \quad P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls} \quad P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

# *Shannon Formeln*

*Shannon Formeln* sind aussagenlogische Formeln, die aufgebaut sind aus

- dem dreistelligen Operator *sh*
- den Konstanten 0 und 1
- Aussagevariablen $P_1, \ldots, P_n, \ldots$

Der Wahrheitswerteverlauf von *sh* wird gegeben durch

$$sh(P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} P_2 & \text{falls} \quad P_1 = 0 \\ P_3 & \text{falls} \quad P_1 = 1 \end{cases}$$

oder in Tabellenform:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $P_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $P_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $sh(P_1, P_2, P_3)$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# *Eigenschaften des* **sh**-*Operators*

1. $sh(P_1, P_2, P_3) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
2. $sh(0, P_2, P_3) \leftrightarrow P_2$
3. $sh(1, P_2, P_3) \leftrightarrow P_3$
4. $sh(P, 0, 1) \leftrightarrow P$
5. $sh(P, 1, 0) \leftrightarrow \neg P$
6. $sh(P_1, P_2, P_2) \leftrightarrow P_2$
7. $sh(sh(P_1, P_2, P_3), P_4, P_5) \quad \leftrightarrow$
   $sh(P_1, sh(P_2, P_4, P_5), sh(P_3, P_4, P_5))$
8. $A \leftrightarrow sh(P, A_{P=0}, A_{P=1})$
9. $\neg sh(A, B, C) \leftrightarrow sh(A, \neg B, \neg C)$

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - $A$ und $B$ normierte *sh*-Formeln sind und

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - $A$ und $B$ normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in $A$ oder $B$ vorkommende Aussagenvariable $P_j$ gilt $j > i$.

# *Normierte Shannon Formeln*

Wir fixieren eine Ordnung auf der Menge der Aussagevariablen, etwa die durch die Ordnung der Indizes gegebene.

*Definition*

1. Die Konstanten $0, 1$ sind normierte *sh*-Formeln.
2. $sh(P_i, A, B)$ ist eine normierte *sh*-Formel wenn
   - $A$ und $B$ normierte *sh*-Formeln sind und
   - für jede in $A$ oder $B$ vorkommende Aussagenvariable $P_j$ gilt $j > i$.

*Theorem*

*Zu jeder aussagenlogischen Formel $A$ gibt es eine äquivalente normierte sh-Formel $B$.*

# *Shannon Graphen*

Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

# *Shannon Graphen*

Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten $v$ ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.

# *Shannon Graphen*

Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten $v$ ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten $v$ gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.

# *Shannon Graphen*

Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten $v$ ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten $v$ gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten $v$ ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.

# *Shannon Graphen*

Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten $v$ ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten $v$ gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten $v$ ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.
- Ist der nichtterminale Knoten $w$ ein unmittelbarer Nachfolger von $v$, dann gilt $index(v) < index(w)$.

# *Shannon Graphen*

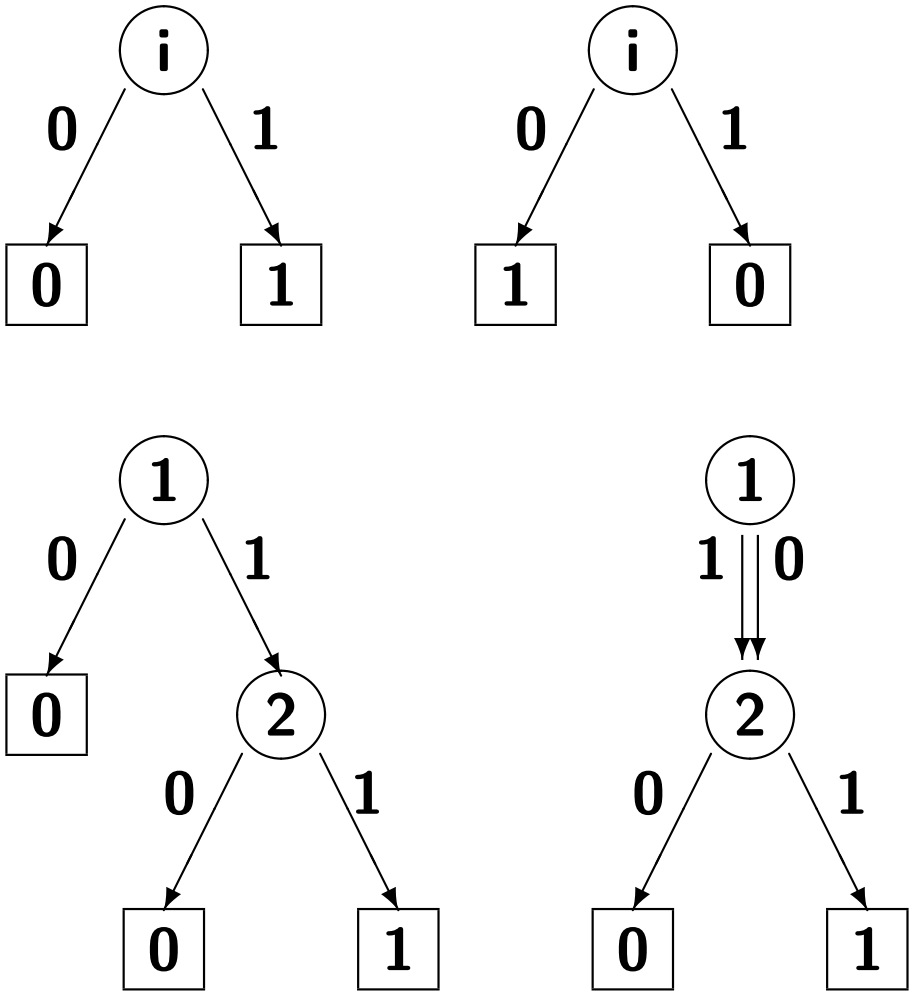
Gegeben sei eine Ordnung $<$ auf der Menge der Aussagevariablen.

*Definition*

Ein *sh-Graph* ist ein gerichteter, binärer, zusammenhängender Graph.

- Jedem nichtterminalen Knoten $v$ ist eine natürliche Zahl $index(v)$ zugeordnet.
- Von jedem nichtterminalen Knoten $v$ gehen zwei Kanten aus. Eine davon ist mit 0, die andere mit 1 gekennzeichnet.
- Jedem terminalen Knoten $v$ ist eine der Zahlen 0 oder 1 zugeordnet, bezeichnet mit $wert(v)$.
- Ist der nichtterminale Knoten $w$ ein unmittelbarer Nachfolger von $v$, dann gilt $index(v) < index(w)$.
- Es gibt genau einen Wurzelknoten.

# *Beispiele von Shannon Graphen*



# *Shannon Graphen vs normierte Shannon Formeln*

Es gibt eine offensichtliche Korrespondenz zwischen

Shannon Graphen

und

normierten Shannon Formeln

Von jetzt an betrachten wir nur noch Shannon Graphen.

# *Shannon Graphen und Boolesche Funktionen*

- Jedem *sh*-Graphen $G$ kann man eine $m$-stellige Boolesche Funktion $f_G$ zuordnen, wobei $m$ die Anzahl der in $G$ vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.

# *Shannon Graphen und Boolesche Funktionen*

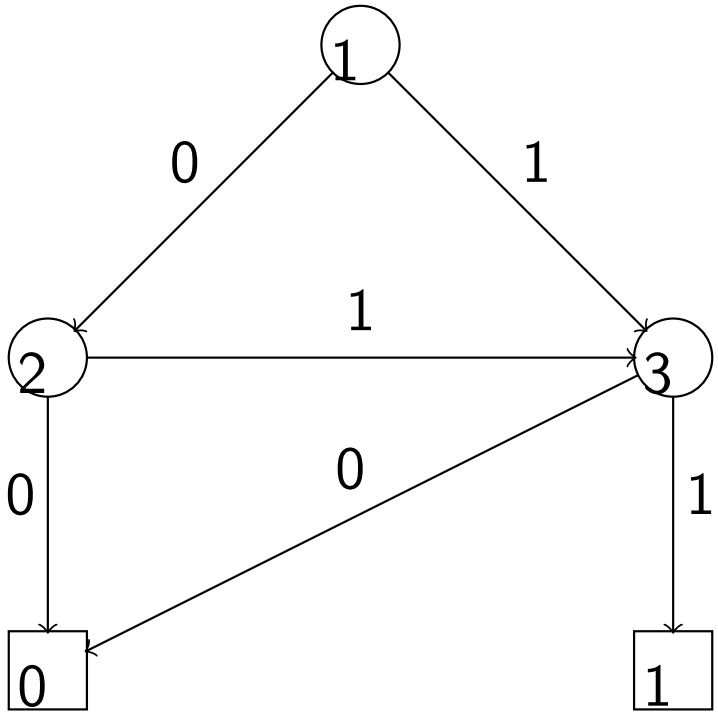
- Jedem *sh*-Graphen $G$ kann man eine $m$-stellige Boolesche Funktion $f_G$ zuordnen, wobei $m$ die Anzahl der in $G$ vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen $f_G$ als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von $G$ beginnend einen Pfad durch $G$ wählen. Am Knoten $v$ folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.

# *Shannon Graphen und Boolesche Funktionen*

- Jedem *sh*-Graphen $G$ kann man eine $m$-stellige Boolesche Funktion $f_G$ zuordnen, wobei $m$ die Anzahl der in $G$ vorkommenden verschiedenen Indizes $i_1, \ldots, i_m$ ist.
- Wir fassen $f_G$ als eine Funktion mit den Eingabevariabeln $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ auf und bestimmen den Funktionswert $f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m})$, indem wir an der Wurzel von $G$ beginnend einen Pfad durch $G$ wählen. Am Knoten $v$ folgen wir der Kante 0, wenn die Eingabevariable $P_{index(v)}$ den Wert 0 hat, sonst der Kante 1.
- Der Wert des terminalen Knotens ist dann der gesuchte Funktionswert.

# *Shannongraph als Boolesche Funktion*

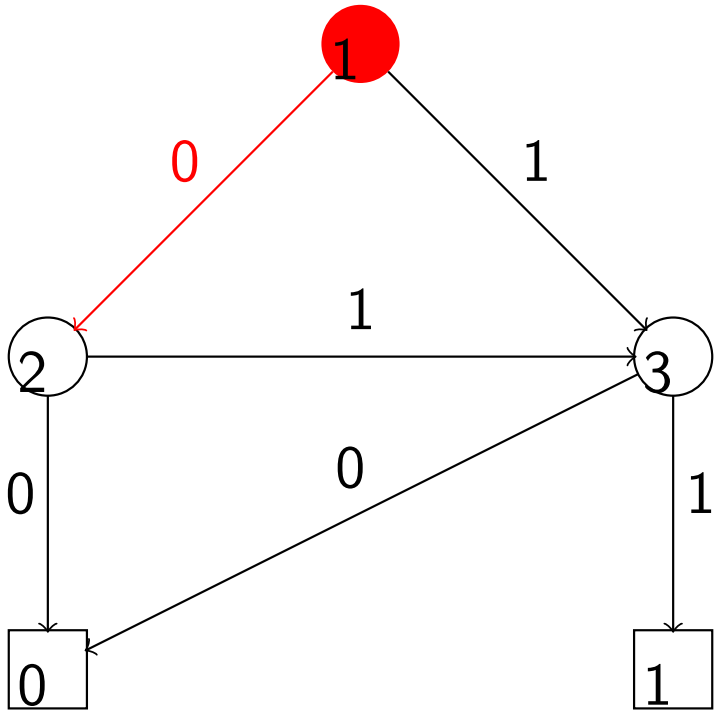
**G:**




$f_G(0,1,0) = ?$

# *Shannongraph als Boolesche Funktion*

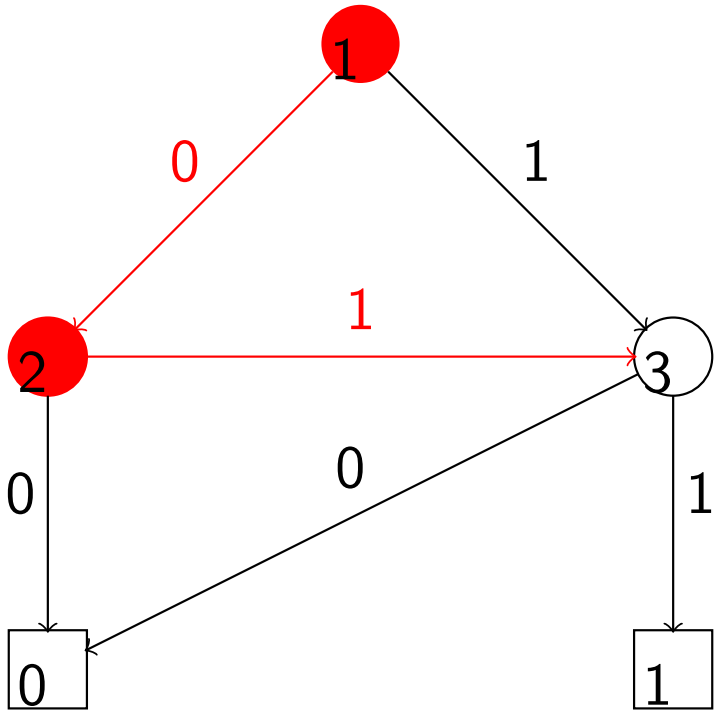
**G:**




$f_G(0,1,0) = ?$

# *Shannongraph als Boolesche Funktion*

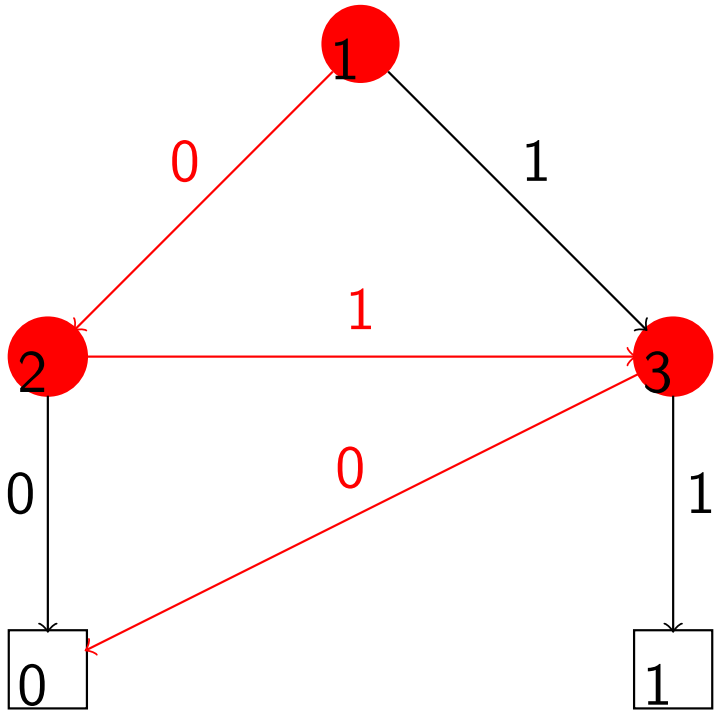
**G:**




$f_G(0, 1, 0) = ?$

# *Shannongraph als Boolesche Funktion*

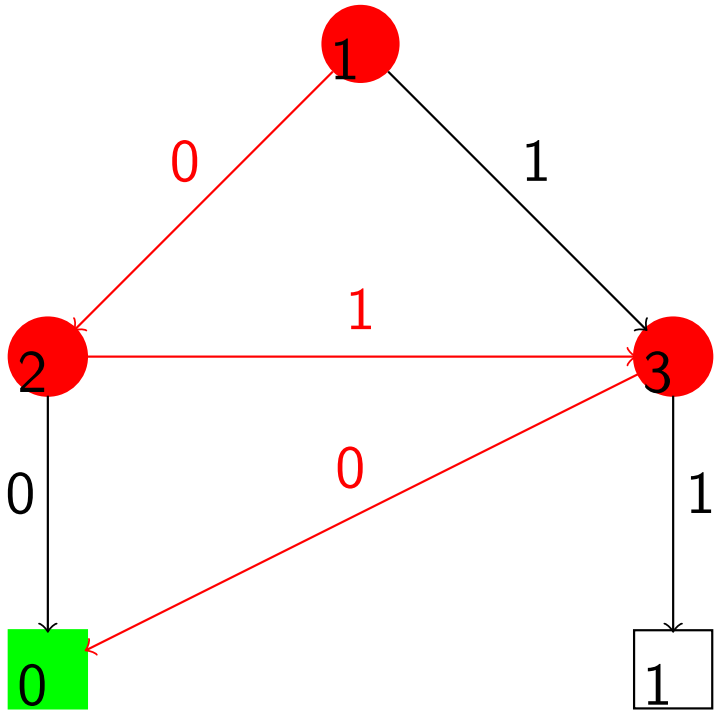
**G:**




$f_G(0,1,0) = ?$

# *Shannongraph als Boolesche Funktion*

**G:**




$f_G(0,1,0) = 0$

# *Reduzierte Shannon Graphen*

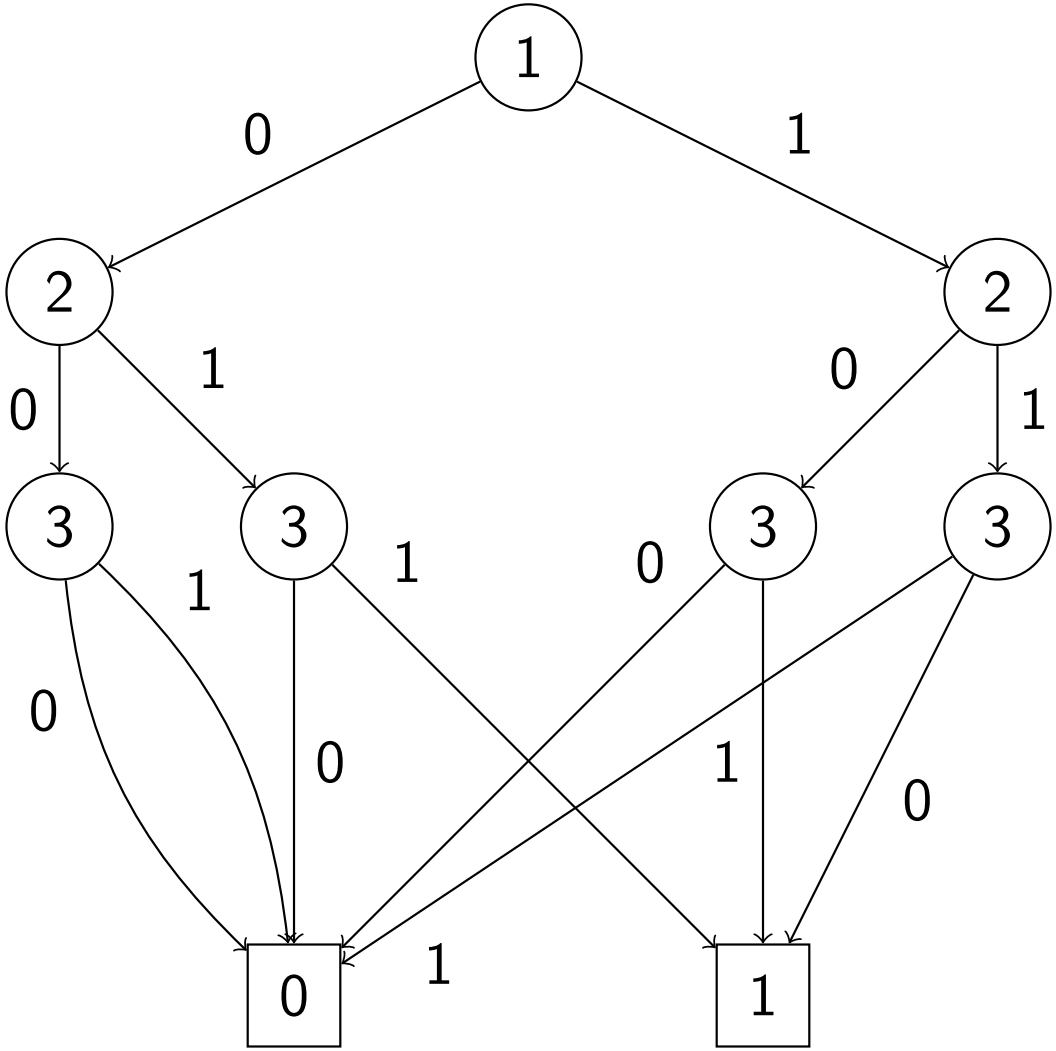
*Definition*

Ein *sh*-Graph heißt *reduziert*, wenn

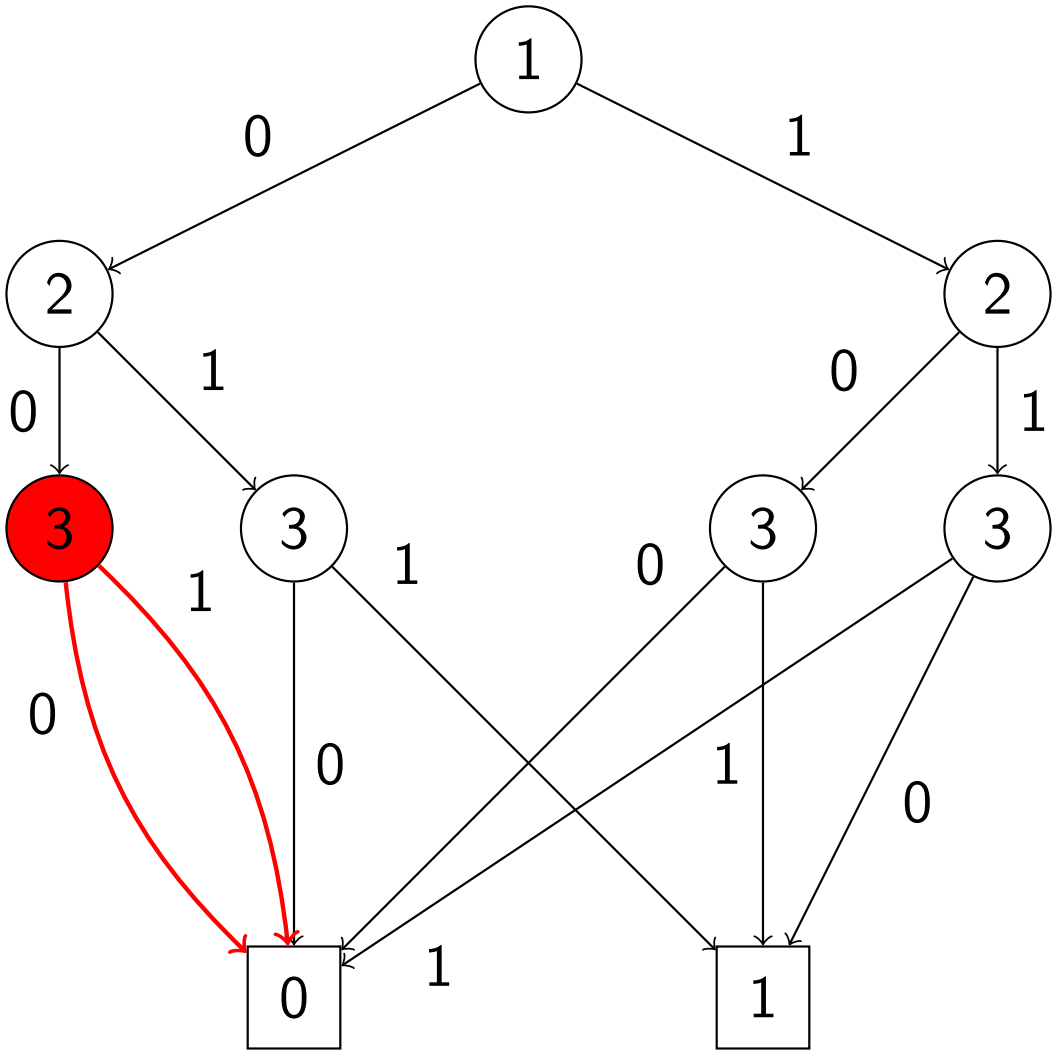
1. es keine zwei Knoten $v$ und $w$ ($v \neq w$) gibt, so daß der in $v$ verwurzelte Teilgraph $G_v$ mit dem in $w$ verwurzelten Teilgraph $G_w$ isomorph ist.
2. es keinen Knoten $v$ gibt, so dass die beiden von $v$ ausgehenden Kanten zum selben Nachfolgerknoten führen.

Ein reduzierter Shannongraph heißt auch *ordered binary decision diagram* (OBDD).

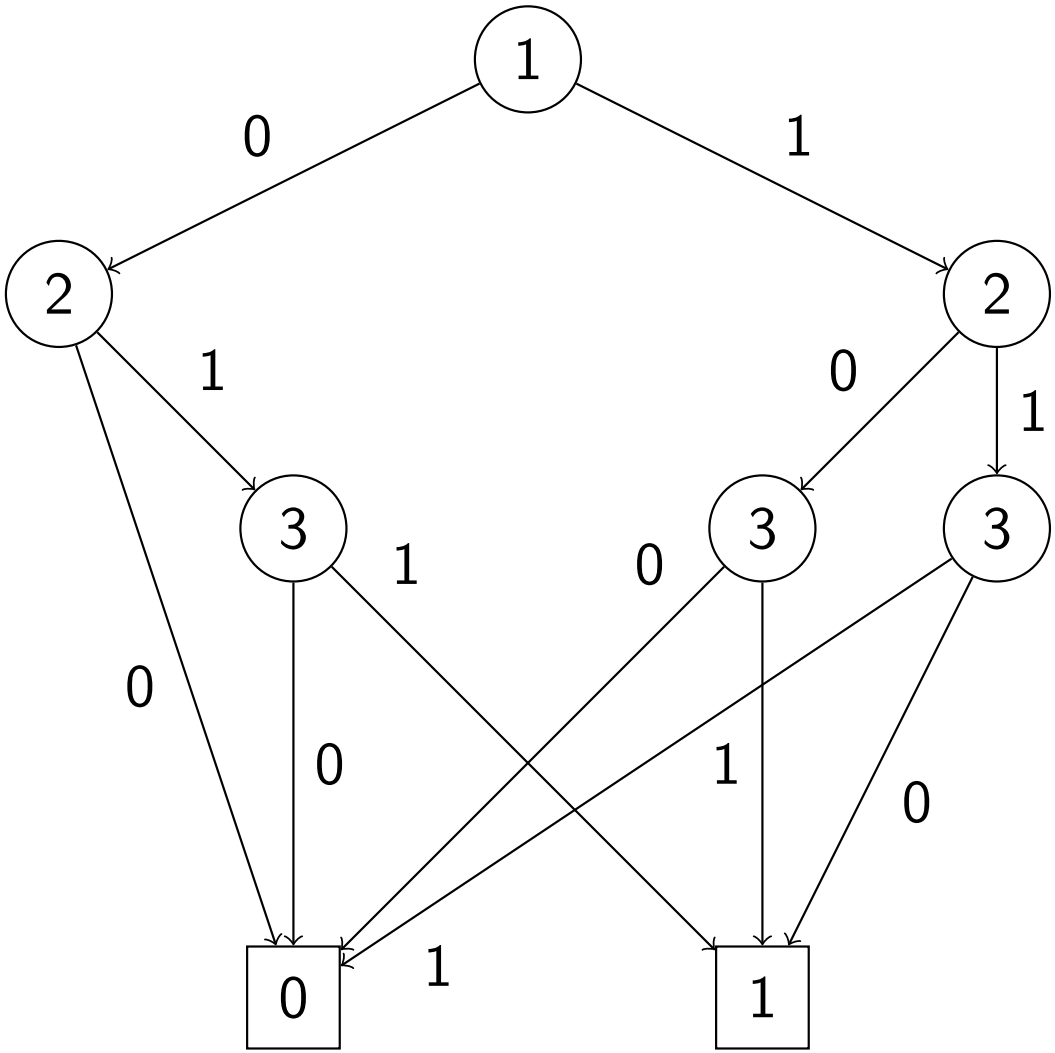
# *Ein Beispiel*



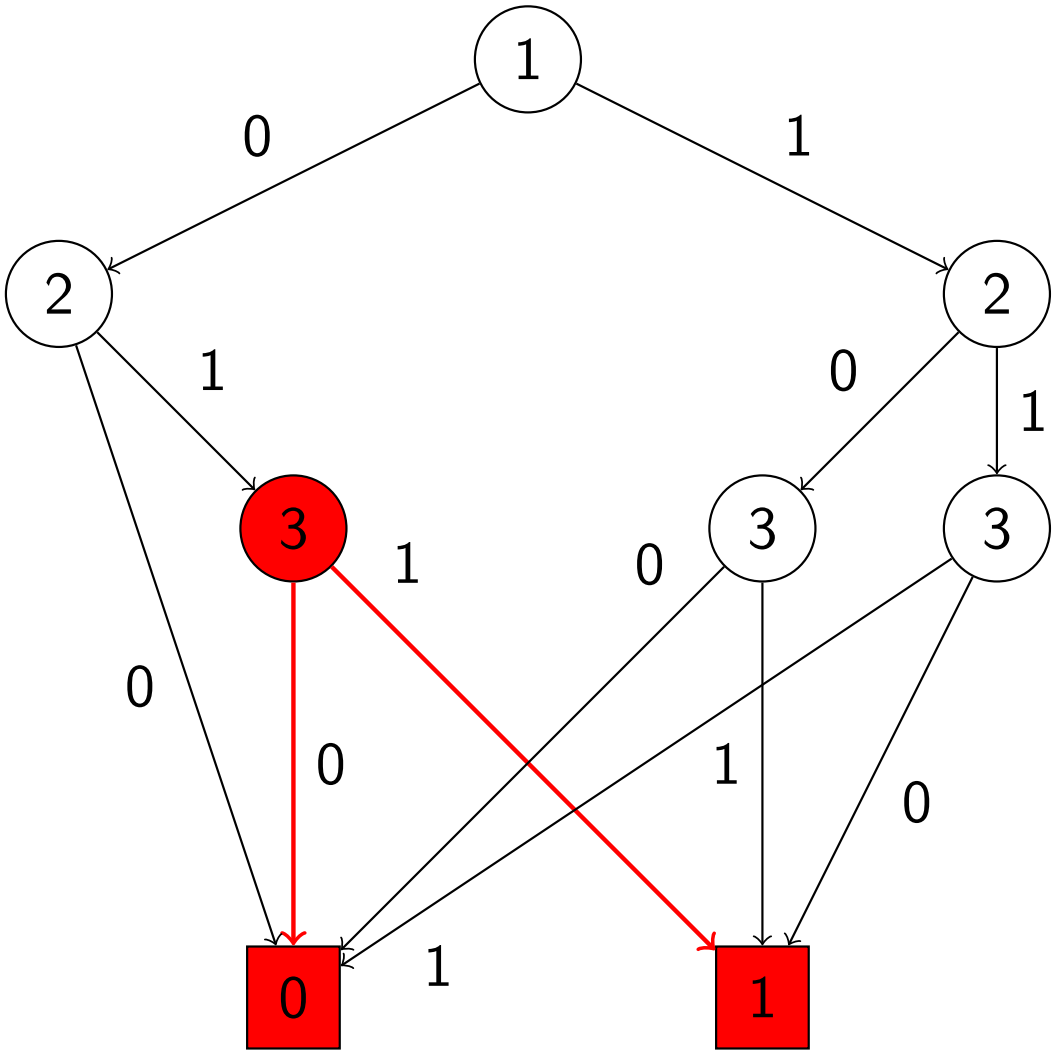
# *Doppelte Kanten*



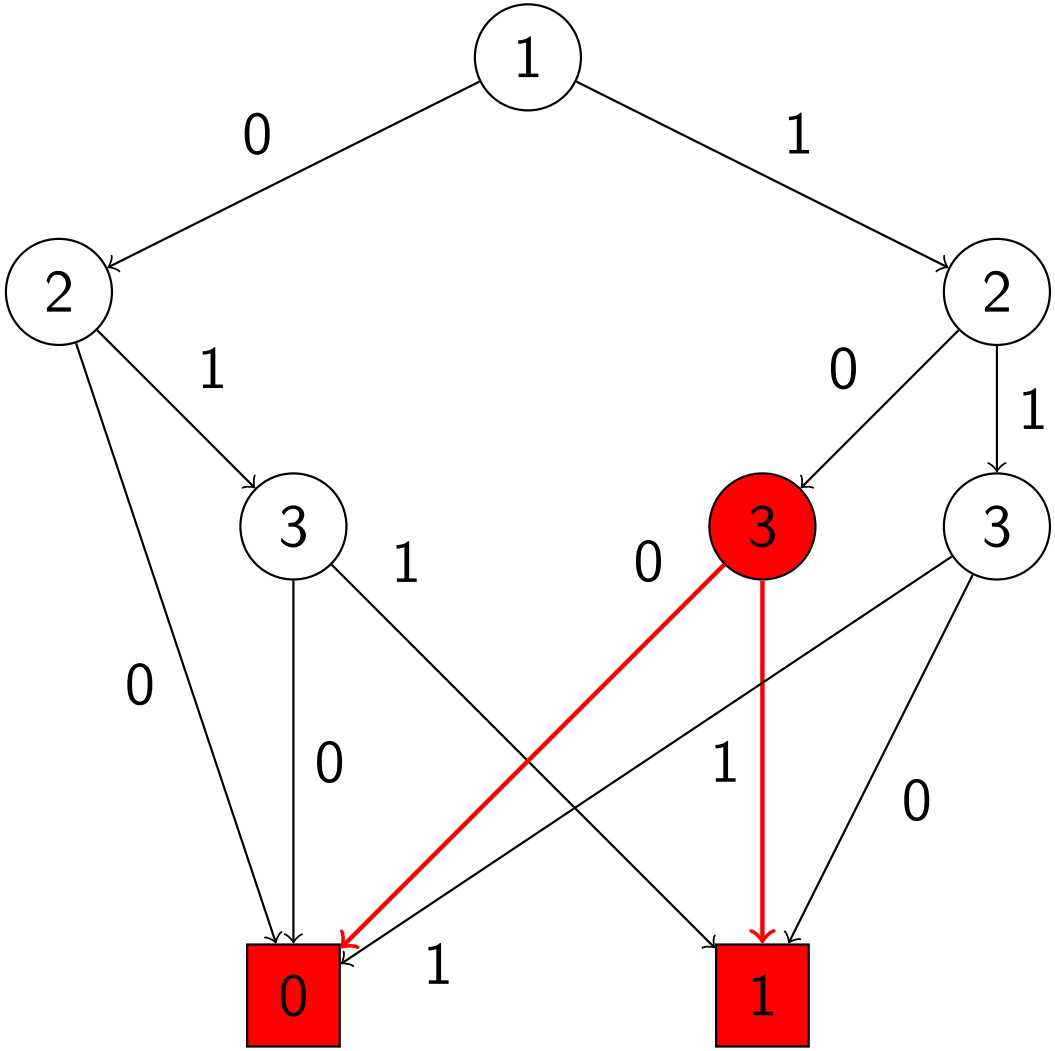
# *Elimination doppelter Kanten*



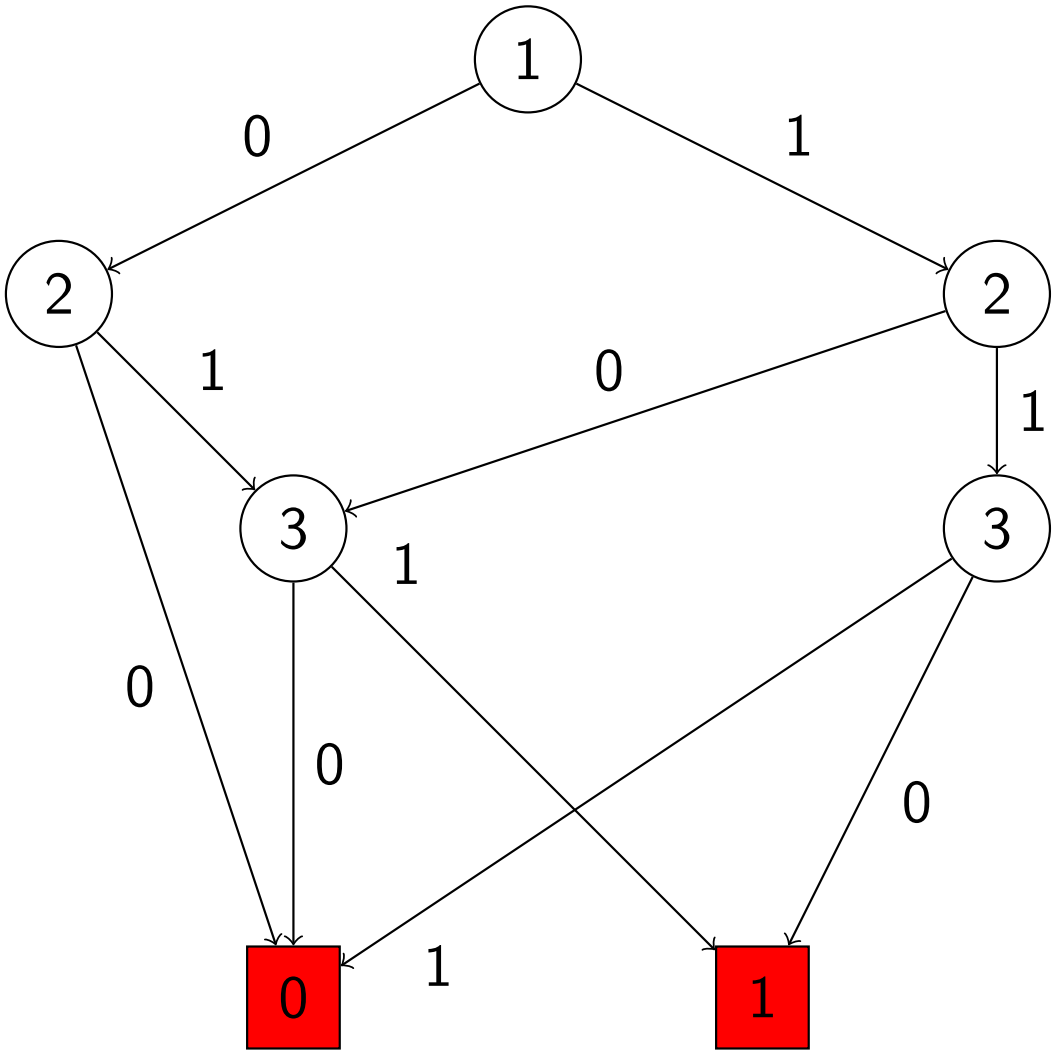
# *Isomorphe Teilgraphen*



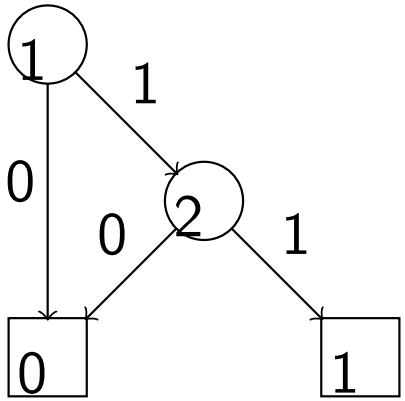
# *Isomorphe Teilgraphen*

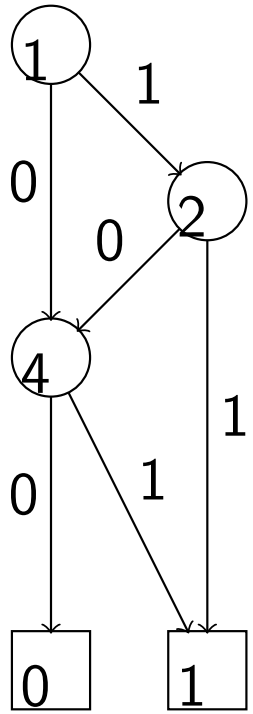


# *Reduktion isomorpher Teilgraphen*



# *Weitere Beispiele*




# *Isomorphie von Shannon Graphen*

## *Definition*

Seien zwei *sh*-Graphen $H, G$ gegeben. Ihre Knotenmengen seien $V_1, V_2$. $H, G$ heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $\pi$ von $V_1$ nach $V_2$ gibt mit:

# *Isomorphie von Shannon Graphen*

## *Definition*

Seien zwei *sh*-Graphen $H, G$ gegeben. Ihre Knotenmengen seien $V_1, V_2$. $H, G$ heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $\pi$ von $V_1$ nach $V_2$ gibt mit:

1. $index(k) = index(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$

# *Isomorphie von Shannon Graphen*

## *Definition*

Seien zwei *sh*-Graphen $H, G$ gegeben. Ihre Knotenmengen seien $V_1, V_2$. $H, G$ heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $\pi$ von $V_1$ nach $V_2$ gibt mit:

1. $index(k) = index(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $wert(k) = wert(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$

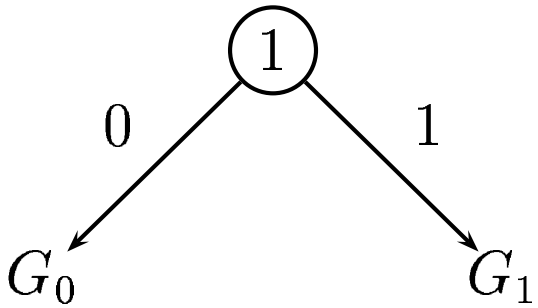
# *Isomorphie von Shannon Graphen*

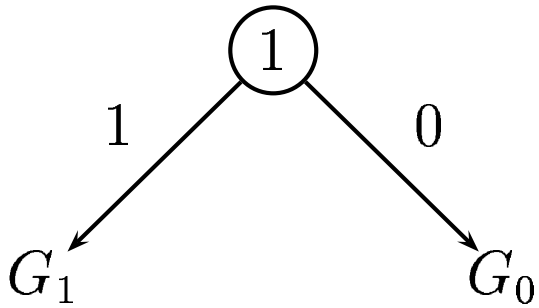
## *Definition*

Seien zwei *sh*-Graphen $H, G$ gegeben. Ihre Knotenmengen seien $V_1, V_2$. $H, G$ heißen zueinander *isomorph* ($H \cong G$) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $\pi$ von $V_1$ nach $V_2$ gibt mit:

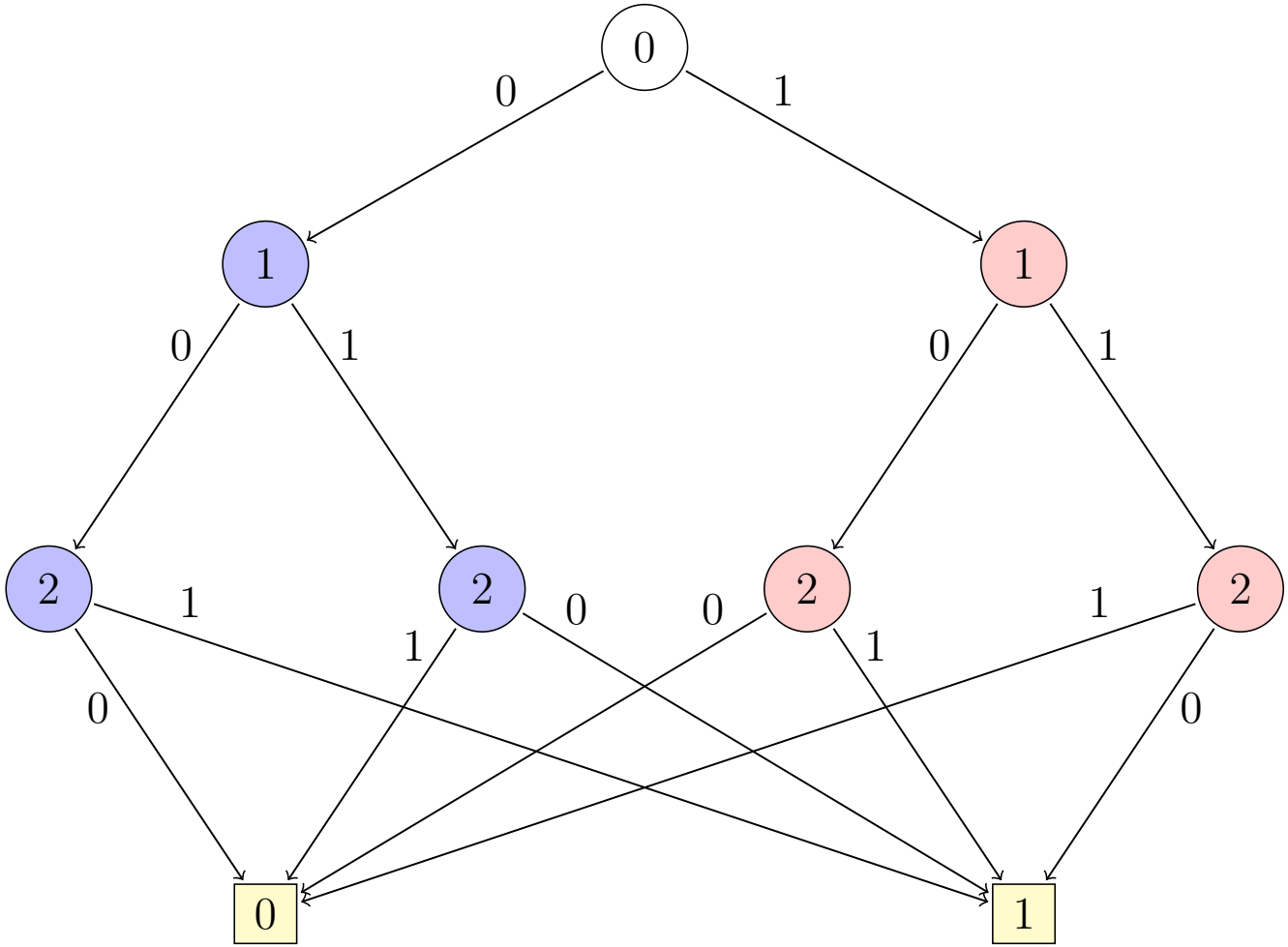
1. $\mathit{index}(k) = \mathit{index}(\pi(k))$ für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$
2. $\mathit{wert}(k) = \mathit{wert}(\pi(k))$ für jeden Terminalknoten $k \in V_1$
3. Für jeden Nichtterminalknoten $k \in V_1$, dessen 0-Kante/1-Kante zu dem Knoten $k_0/k_1$ führt, gilt: die 0-Kante von $\pi(k)$ führt zu $\pi(k_0)$, die 1-Kante zu $\pi(k_1)$.

# *Einfachstes Beipiel isomorpher Shannon Graphen*

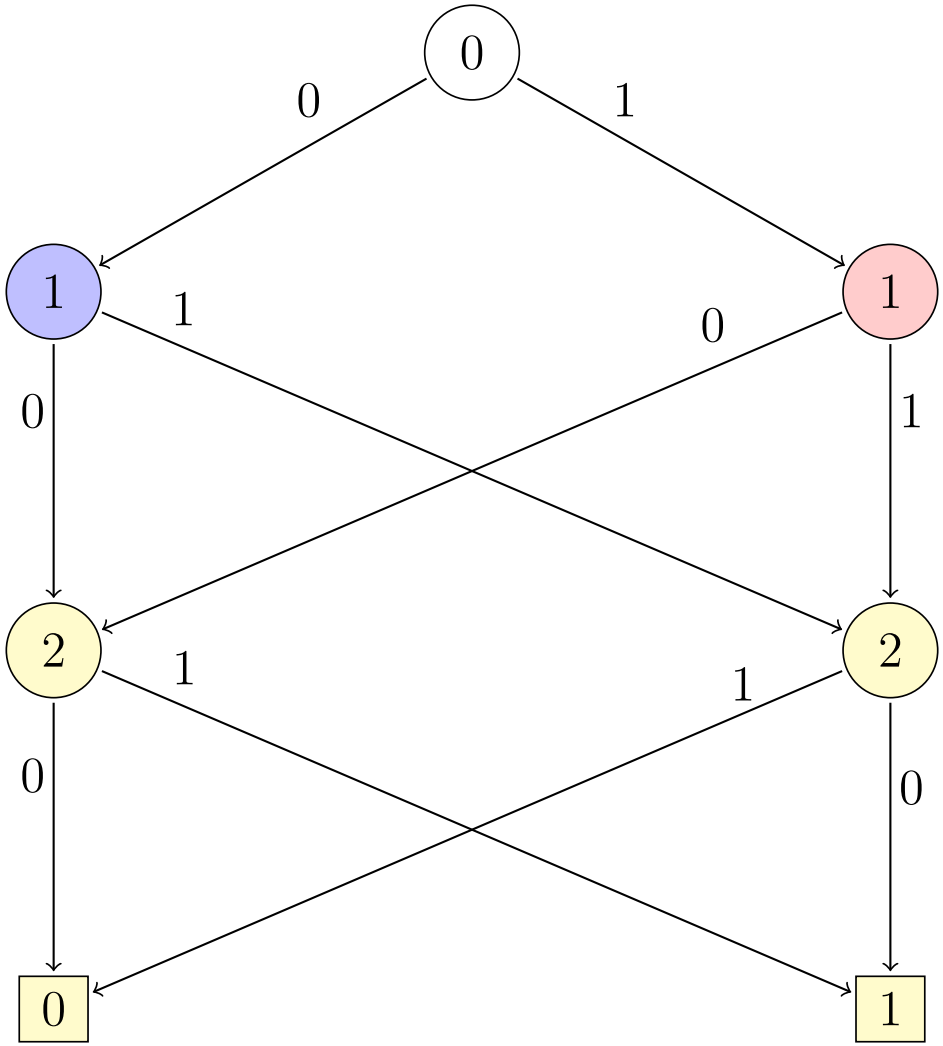


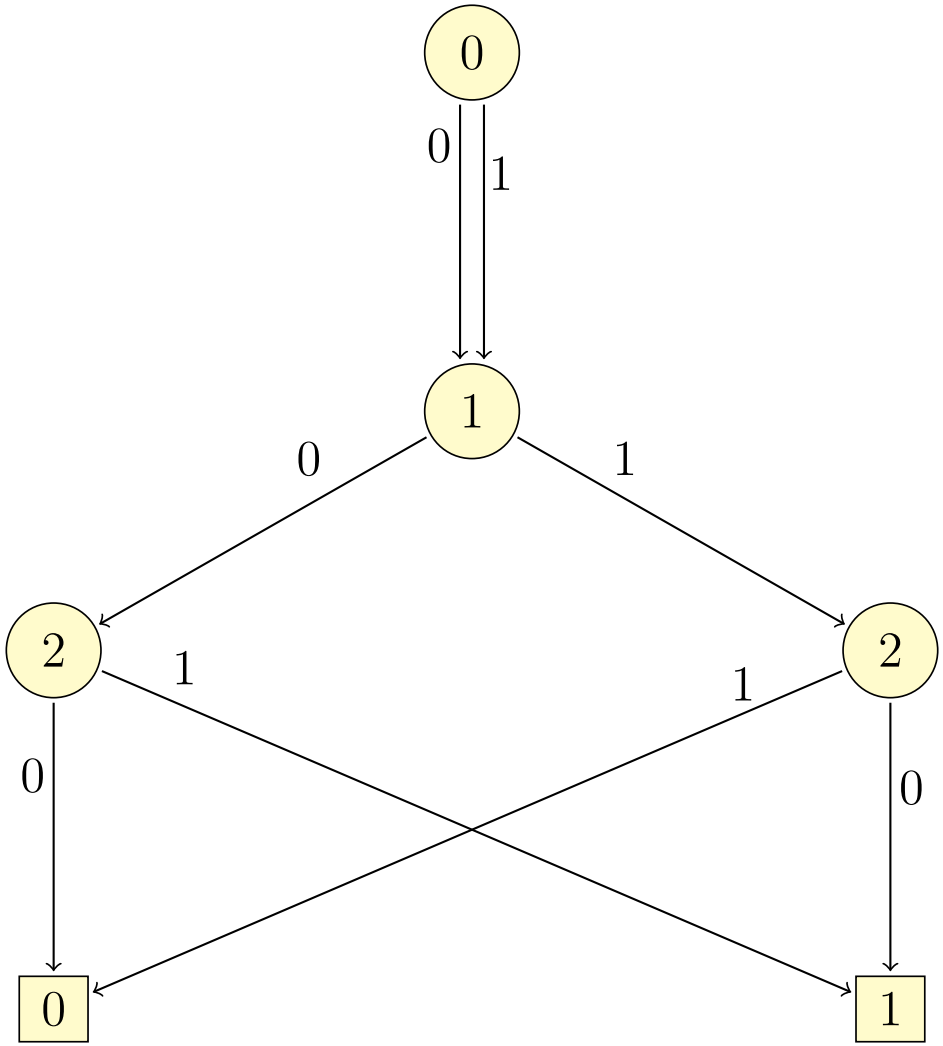

# *Komplexeres Beipiel isomorpher Shannon Graphen*



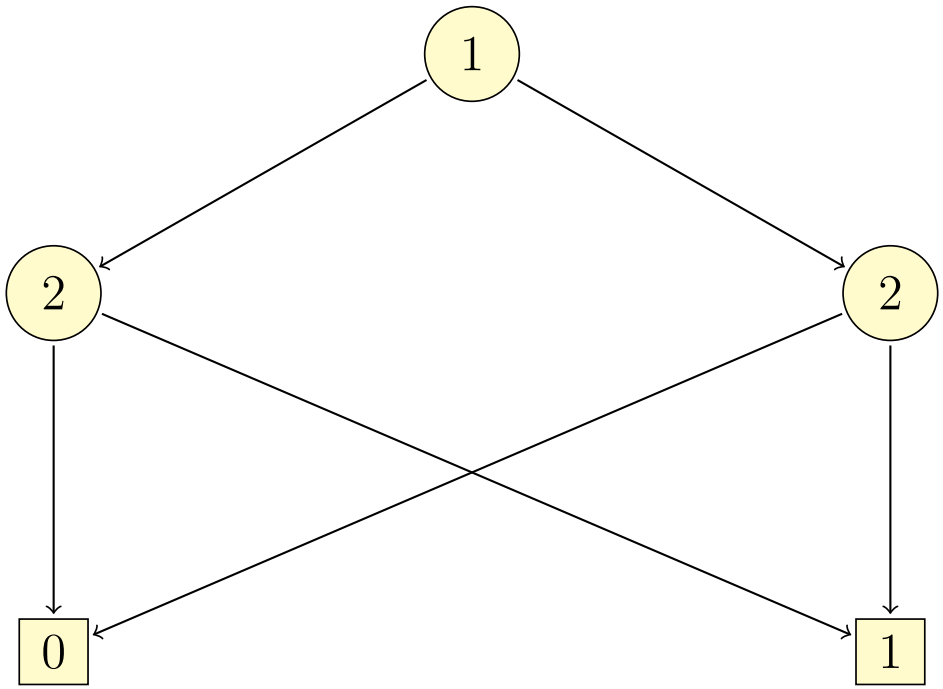

# *Erste Reduktion*



# *Zweite Reduktion*



# *Letzte Reduktion*




# *Ein Kriterium für Reduziertheit*

*Theorem*

*Sei $G$ ein Shannongraph, so daß für jedes Paar von Knoten $v, w$ gilt*

*wenn* *die 1-Nachfolger von $v$ und $w$ gleich sind und*
*die 0-Nachfolger von $v$ und $w$ gleich sind*
*dann* $v = w$

*Dann erfüllt $G$ die Bedingung (1) aus der Definition reduzierter Shannongraphen, d.h. für jedes Paar $x, y$ von Knoten gilt*

*wenn* $G_x$ *isomorph zu* $G_y$ *ist*
*dann* $x = y$

# *Eindeutigkeit reduzierter Shannon Graphen*

*Theorem*

*Sind $G, H$ reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, dann gilt*

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

*(Zu jeder Booleschen Funktion $f$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen $H$ mit $f = f_H$).*

# *Eindeutigkeit reduzierter Shannon Graphen*

**Theorem**

*Sind $G, H$ reduzierte sh-Graphen zu $\Sigma = \{P_1, ..., P_n\}$, dann gilt*

$$f_G = f_H \Leftrightarrow G \cong H.$$

*(Zu jeder Booleschen Funktion $f$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen reduzierten sh-Graphen $H$ mit $f = f_H$).*

**Proof.**

$\Leftarrow$ offensichtlich.

$\Rightarrow$ nächste Seiten □

# *Terminologie*

Sei $G$ ein Shannongraph, $i_1, \ldots, i_m$ die in $G$ vorkommenden Knotenmarkierungen und

$$f_G(P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}) \mapsto \{0, 1\}$$

die Boolesche Funktion zu $G$. Einfachheitshalber nehmen wir an

$$f_G(P_1, \ldots, P_m) \mapsto \{0, 1\}$$

$$f_{G,P_i=1}(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m) = f_G(P_1, \ldots, P_{i-1}, 1, P_{i+1}, \ldots, P_m)$$

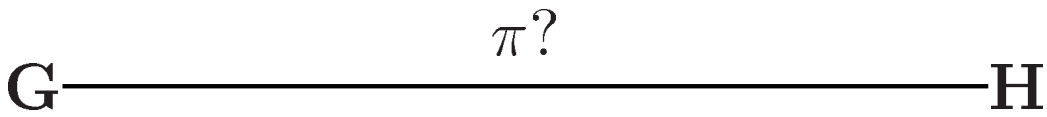
$$f_{G,P_i=0}(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_m) = f_G(P_1, \ldots, P_{i-1}, 0, P_{i+1}, \ldots, P_m)$$

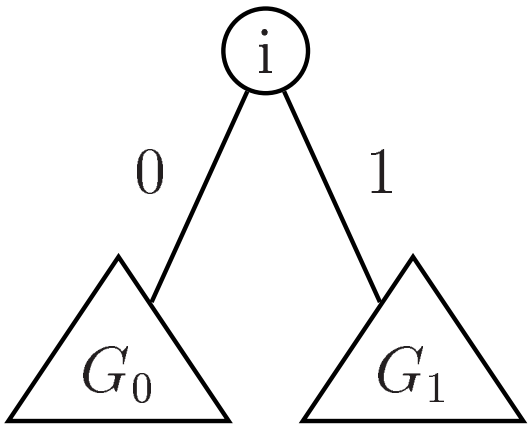
Wir sagen: $f_G$ hängt von $P_i$ ab, wenn

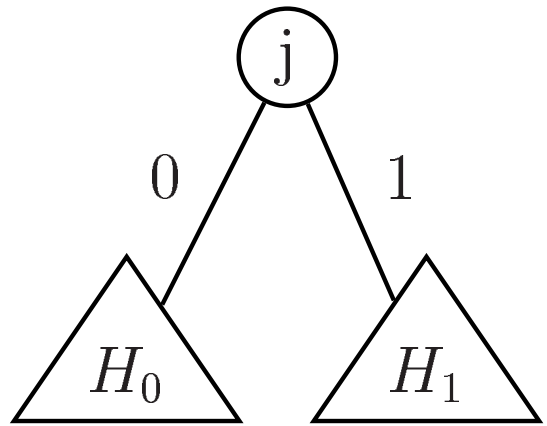
$$f_{G,P_i=1} \neq f_{G,P_i=0}$$

# *Beweis*

Annahme: $f_G = f_H$

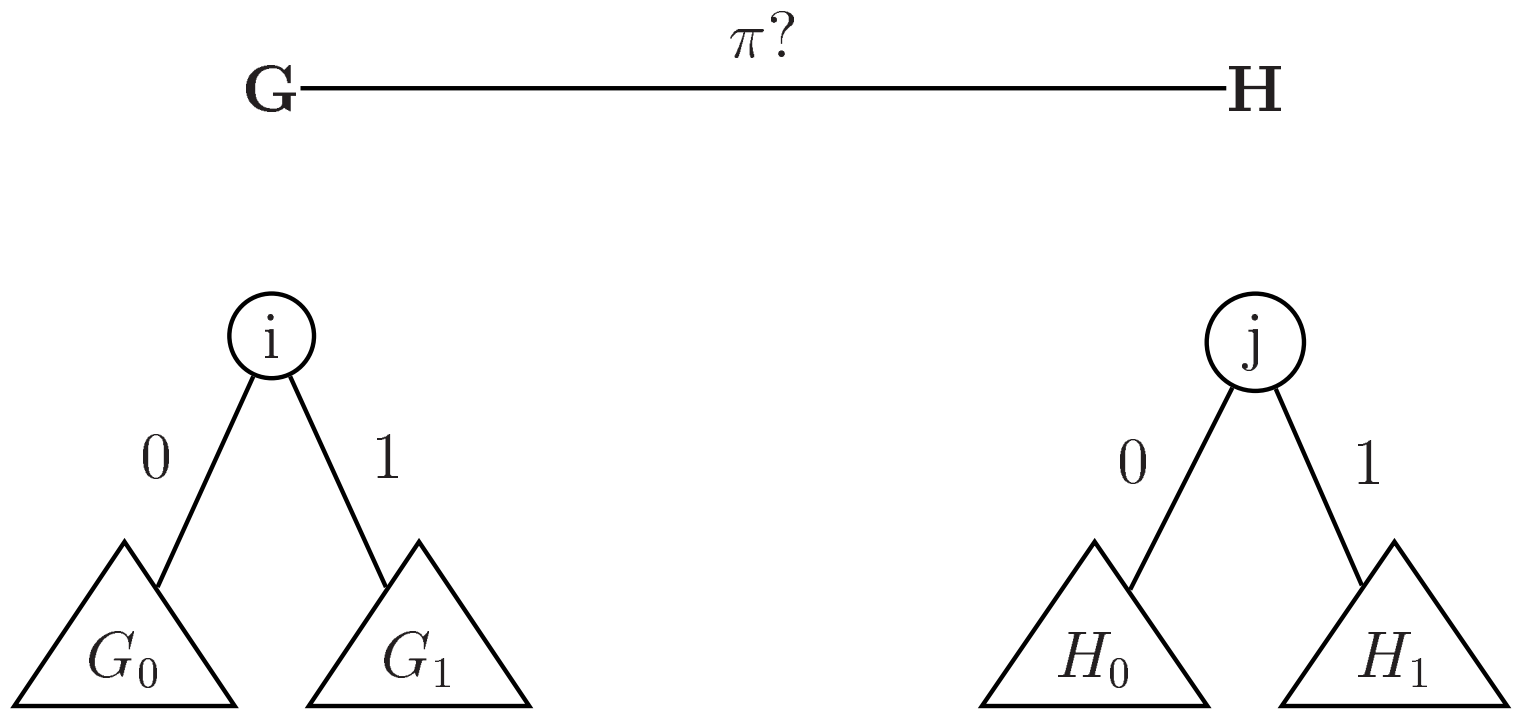



# *Beweis*

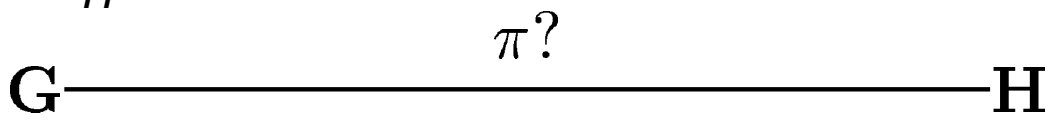
Annahme: $f_G = f_H$

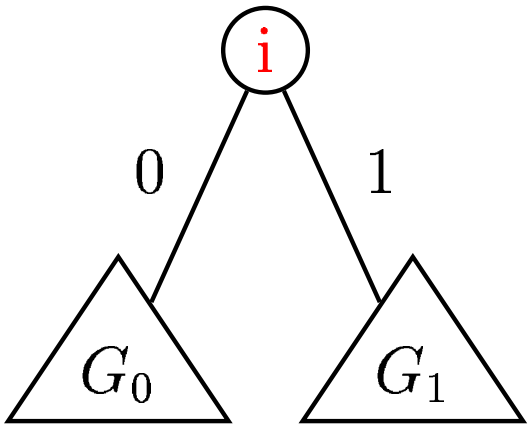


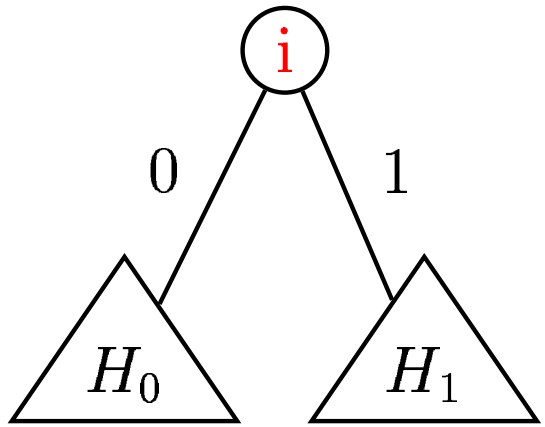

$P_i$ ist die Variable mit dem kleinsten Index, von der $f_G$ abhängt.
$P_j$ ist die Variable mit dem kleinsten Index, von der $f_H$ abhängt.

# *Beweis*

Annahme: $f_G = f_H$

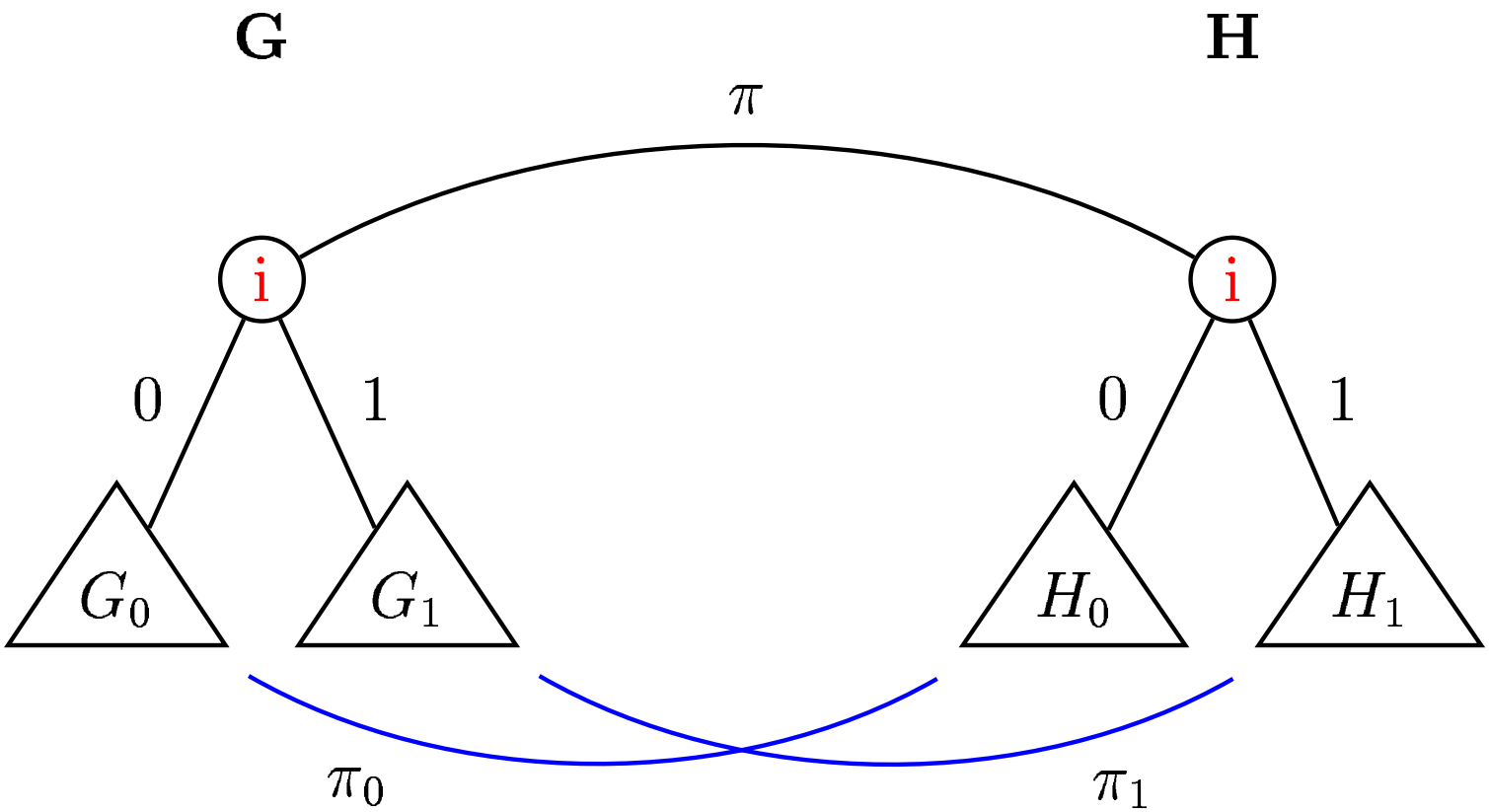



# *Beweis*

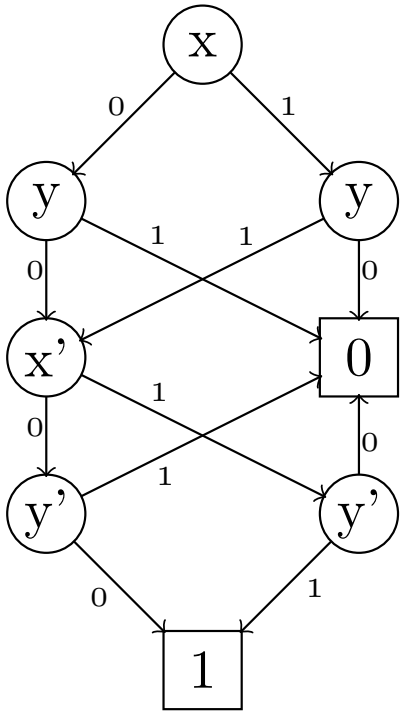
Annahme: $f_G = f_H$




Induktionsvoraussetzung

# *Abhängigkeit von der Variablenordnung*

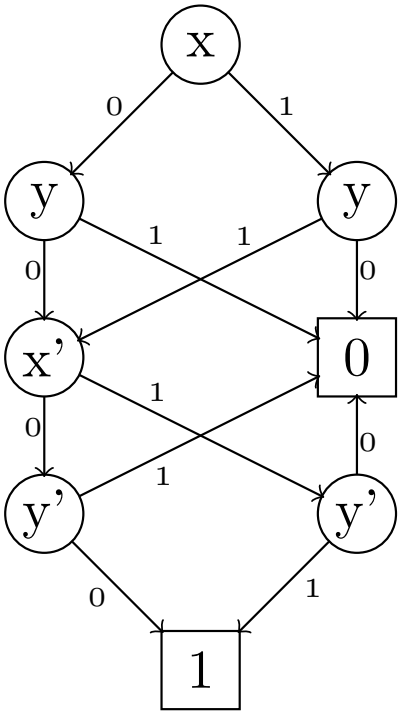
Zwei BDDs für $(x \longleftrightarrow y) \wedge (x' \longleftrightarrow y')$



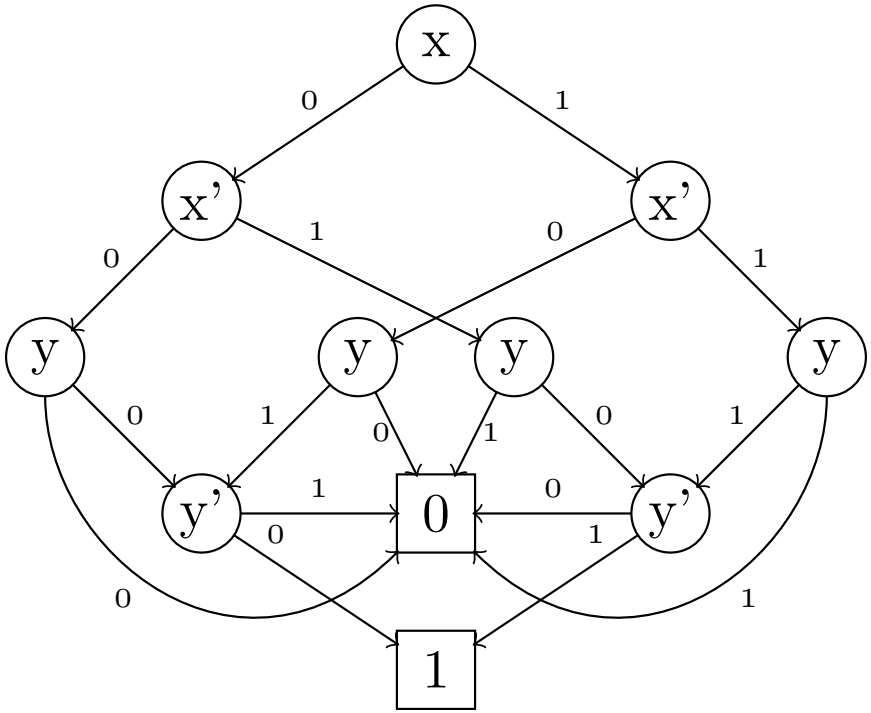

Ordnung: $x < y < x' < y'$

# *Abhängigkeit von der Variablenordnung*

Zwei BDDs für $(x \longleftrightarrow y) \wedge (x' \longleftrightarrow y')$




Ordnung: $x < y < x' < y'$




Ordnung: $x < x' < y < y'$

# *Eine harte Nuß*

[BDD für Multiplikationen]

- $X$ enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$

# *Eine harte Nuß*

[BDD für Multiplikationen]

- $X$ enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen $k$-stellige Binärzahlen.

# *Eine harte Nuß*

[BDD für Multiplikationen]

- $X$ enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen $k$-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das $i$-te Bit des Produktes von $x$ mit $y$ beschreibt.

# *Eine harte Nuß*

[BDD für Multiplikationen]

- $X$ enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen $k$-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das $i$-te Bit des Produktes von $x$ mit $y$ beschreibt.

# *Eine harte Nuß*

[BDD für Multiplikationen]

- $X$ enthalte $2k$ Variablen $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}\}$
- $x = x_0 \ldots x_{k-1}$ und $y = y_0 \ldots y_{k-1}$ bezeichnen $k$-stellige Binärzahlen.
- für $0 \leq i < 2k$ bezeichne $Mult_i$ die boolsche Funktion, die das $i$-te Bit des Produktes von $x$ mit $y$ beschreibt.

*Theorem*

*Für jede Ordnung $<$ der Variablen in $X$ gibt es einen Index $0 \leq i < 2k$, so dass der BDD $B_{Mult_i,<}$ mindestens $2^{k/8}$ Knoten besitzt.*