

# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



## *Sonstige Kalküle*

- Davis-Putnam-Verfahren
- Numerische Verfahren



## Das Davis-Putnam-Verfahren

$S$  eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege( $S$ ):
2. falls  $S = \emptyset$ , Ende ( $S$  ist erfüllbar).
3. falls  $S$  keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable  $P$  ;  
widerlege( $S_P$ ) ; widerlege( $S_{\neg P}$ ).
4. sonst wähle eine Einerklausel  $K \in S$
5.  $S = \text{reduziere}(K, S)$ 
  - Lasse alle Klauseln weg, die  $K$  als Literal enthalten,
  - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu  $K$  komplementäre Literal weg.
6. falls  $\square \in S$ , Ende ( $S$  widersprüchlich),  
sonst widerlege( $S$ ).

$S_P = S \cup \{\{P\}\}$ , bzw.  $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$ .



# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge  $S$

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von `widerlege(S)` wird das Unterprogramm `reduziere( $\neg P_2, S$ )` aufgerufen.



# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge  $S$

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von `widerlege(S)` wird das Unterprogramm `reduziere( $\neg P_2, S$ )` aufgerufen und liefert  $S_1$ :

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

blau = unverändert



## Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_1$ :

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{array}$$

$S_1$  enthält keine Einerklausel. Die Variable  $P_1$  wird gewählt und  $\text{widerlege}(S_{1,0})$  und  $\text{widerlege}(S_{1,1})$  werden aufgerufen.

$S_{1,0}$  :

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \\ P_1 \end{array}$$

$S_{1,1}$  :

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \\ \neg P_1 \end{array}$$



*Beispiel*  
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$  :

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$P_1$

reduziere( $P_1, S_{1,0}$ )



# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$  :

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$P_1$

reduziere( $P_1, S_{1,0}$ ): Die **Klauseln** werden gestrichen.





# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere( $P_1, S_{1,0}$ ) führt zu  $S_{2,0}$ :

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$



## Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere( $P_1, S_{1,0}$ ) führt zu  $S_{2,0}$ :

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere( $P_3, S_{2,0}$ ) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$



## Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere( $P_1, S_{1,0}$ ) führt zu  $S_{2,0}$ :

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere( $P_3, S_{2,0}$ ) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$\text{reduziere}(P_4, \{P_4, \neg P_4\}) = \{\square\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von  $S_{1,0}$  folgt.



# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$  :

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$P_1$$

$S_{1,1}$  :

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$\neg P_1$$

Jetzt kommt die Abarbeitung von  $\text{widerlege}(S_{1,1})$  an die Reihe.



# Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,1}$  :

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$\neg P_1$

reduziere( $\neg P_1$ ,  $S_{1,1}$ ) entfernt die Klauseln, in denen  $\neg P_1$  vorkommt ...



## Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen  $P_1$ .

Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,

woraus die Unerfüllbarkeit von  $S_{1,1}$  und damit insgesamt die Unerfüllbarkeit von  $S$  folgt.



## Ein Numerisches Verfahren

Gegeben: eine KNF  $A = D_1 \wedge \dots \wedge D_k$

$U_i$  entstehe aus  $D_i$ , indem:

$P_j$	ersetzt wird durch	$X_j$ ,
$\neg P_j$	durch	$(1 - X_j)$
$\vee$	durch	$+$

$U(A)$  ist die Menge der Ungleichungen

$$U_i \geq 1 \text{ f\"ur alle } i$$

und

$$0 \leq X_j \leq 1 \text{ f\"ur alle } j$$



# Theorem

## *Theorem*

*A ist erfüllbar*

*gdw*

*das Gleichungssystem  $U(A)$  in den ganzen Zahlen lösbar ist.*





## Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich  $U(E)$ :

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$



## Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich  $U(E)$ :

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Vereinfacht:

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 - X_2 \geq 0 \\ X_2 - X_1 \geq 0 & X_1 + X_2 \leq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$



## Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich  $U(E)$ :

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_2 - X_1 \geq 0$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 - X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

Weiter vereinfacht:

$$X_1 = X_2$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

Dieses Gleichungssystem ist unlösbar mit ganzen Zahlen.



## *Lösbarkeit in den rationalen Zahlen*

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 &= X_2 \\ 0 &\leq X_1 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 1 \\ 0 &\leq X_2 \leq 1 \end{aligned}$$

sind allerdings lösbar für rationale Zahlen.

### *Theorem*

*$U(S)$  besitzt keine rationale Lösung*

*gdw*

*aus  $S$  ist mit 1-Resolution  $\square$  herleitbar.*



## Beweis (1)

Sei  $S$  eine Menge von Klauseln, aus der mit 1-Resolution die leere Klausel  $\square$  nicht herleitbar ist. Dann gibt es eine konsistente Menge  $ML$  von Literalen und eine nicht leere Menge von Klauseln  $S_0$  ohne Einerklauseln, so dass  $S$  erfüllbar ist genau dann, wenn  $ML \cup S_0$  erfüllbar ist. Ordnet man den positiven Literalen in  $ML$  den Wert 1, den negativen Literalen in  $ML$  den Wert 0 und allen anderen Atomen den Wert  $\frac{1}{2}$  zu, so sind alle Gleichungen in  $U(ML \cup S_0)$  erfüllt und damit auch alle Gleichungen in dem ursprünglichen  $U(S)$ .



## Beweis (2)

Kann man aus  $S$  mit 1-Resolution die leere Klausel herleiten und ist  $ML$  die Menge der Literale, die dabei als Einerklauseln auftreten, dann ist eine Belegung  $b$  der Variablen mit rationalen Zahlen eine Lösung für  $U(S)$  genau dann, wenn  $b$  eine Lösung für  $U(ML)$  ist.  $U(ML)$  enthält aber nur Gleichungen der Form  $x = 1$  oder  $x = 0$ , so dass jede Lösung eine ganzzahlige Lösung ist. Da aus  $ML$  außerdem  $\square$  ableitbar ist, existiert auch keine ganzzahlige Lösung.



## Beispiel 2

Dieses Beispiel ist die Übersetzung der Klauselmenge  $S$ , die wir schon bei der Vorstellung des Davis-Putnam-Verfahrens betrachtet hatten.

$S =$

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$



## Beispiel 2

Fortsetzung

$U(S) =$

$$\begin{array}{rccccccc} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & \geq & 1 \\ -X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq & -1 \\ -X_1 & + & & & X_3 & & & \geq & 0 \\ -X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq & -1 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & \geq & 0 \\ & & - & X_2 & & & & \geq & 0 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$$





## Beispiel 2

Fortsetzung

$$\begin{array}{rccccccc} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & \geq & 1 \\ -X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq -1 \\ -X_1 & + & & & X_3 & & & \geq 0 \\ -X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq -1 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & \geq 0 \\ & & - & X_2 & & & & \geq 0 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$$

Aus der letzten Ungleichung folgt sofort  $X_2 = 0$ . Aus der dritten und vorletzten Ungleichung folgt  $X_1 = X_3$ .

Eingesetzt in das Gleichungssystem ergibt sich:

$$\begin{array}{rcccc} 2X_1 & & & \geq & 1 \\ -X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq & -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$



## Beispiel 2

$$\begin{array}{rclcl} 2X_1 & & \geq & 1 & \\ -X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq & -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt  $X_1 = 1$



## Beispiel 2

$$\begin{array}{rcll} 2X_1 & & \geq & 1 \\ -X_1 & - & X_4 & \geq -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt  $X_1 = 1$

Eingesetzt in die beiden folgenden Ungleichung ergibt sich

$$\begin{array}{rcll} - & X_4 & \geq & 0 \\ + & X_4 & \geq & 1 \end{array} \quad 0 \leq X_4 \leq 1$$

Dieses System ist sicherlich unerfüllbar.

