

Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



Sonstige Kalküle

- Davis-Putnam-Verfahren



Sonstige Kalküle

- Davis-Putnam-Verfahren
- Numerische Verfahren



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$
 - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$
 - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,
 - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$
 - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,
 - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.
6. falls $\square \in S$, Ende (S widersprüchlich),
sonst widerlege(S).



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$
 - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,
 - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.
6. falls $\square \in S$, Ende (S widersprüchlich),
sonst widerlege(S).



Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ;
widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S = \text{reduziere}(K, S)$
 - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,
 - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.
6. falls $\square \in S$, Ende (S widersprüchlich),
sonst widerlege(S).

$$S_P = S \cup \{\{P\}\}, \text{ bzw. } S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}.$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von `widerlege(S)` wird das Unterprogramm `reduziere($\neg P_2, S$)` aufgerufen.



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von `widerlege(S)` wird das Unterprogramm `reduziere($\neg P_2, S$)` aufgerufen und liefert S_1 :

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

blau = unverändert



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

S_1 :

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel.



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

S_1 :

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \quad \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel. Die Variable P_1 wird gewählt und $\text{widerlege}(S_{1,0})$ und $\text{widerlege}(S_{1,1})$ werden aufgerufen.

$S_{1,0}$:

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \\ P_1 \end{array}$$

$S_{1,1}$:

$$\begin{array}{l} P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 \\ \neg P_1 \end{array}$$



Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

P_1

reduziere($P_1, S_{1,0}$)



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

P_1

reduziere($P_1, S_{1,0}$): Die **Klauseln** werden gestrichen.



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

reduziere($P_1, S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere($P_1, S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere($P_3, S_{2,0}$) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere($P_1, S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere($P_3, S_{2,0}$) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{aligned} S_{1,0} : \\ \neg P_1 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 \\ \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \end{aligned}$$

reduziere($P_1, S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere($P_3, S_{2,0}$) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$\text{reduziere}(P_4, \{P_4, \neg P_4\}) = \{\square\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,0}$ folgt.



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$P_1$$

$S_{1,1}$:

$$P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_4$$

$$\neg P_1 \vee P_3$$

$$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

$$P_1 \vee \neg P_3$$

$$\neg P_1$$

Jetzt kommt die Abarbeitung von $\text{widerlege}(S_{1,1})$ an die Reihe.



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,1}$:

$P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_4$

$\neg P_1 \vee P_3$

$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

$P_1 \vee \neg P_3$

$\neg P_1$

reduziere($\neg P_1$, $S_{1,1}$) entfernt die Klauseln, in denen $\neg P_1$ vorkommt ...



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1 .



Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$$S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1 .

Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1 .

Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,



Beispiel

zum Davis-Putnam-Verfahren

$$S_{1,1} : \\ P_1 \vee P_3 \\ P_1 \vee \neg P_3$$

... und streicht in den restlichen P_1 .

Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\square\}$$

entsteht,

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,1}$ und damit insgesamt die Unerfüllbarkeit von S folgt.



Ein Numerisches Verfahren

Gegeben: eine KNF $A = D_1 \wedge \dots \wedge D_k$

U_i entstehe aus D_i , indem:

P_j	ersetzt wird durch	X_j ,
$\neg P_j$	durch	$(1 - X_j)$
\vee	durch	$+$

$U(A)$ ist die Menge der Ungleichungen

$$U_i \geq 1 \text{ f\"ur alle } i$$

und

$$0 \leq X_j \leq 1 \text{ f\"ur alle } j$$



Theorem

Theorem

A ist erfüllbar

gdw

das Gleichungssystem $U(A)$ in den ganzen Zahlen lösbar ist.



Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich $U(E)$:

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$



Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich $U(E)$:

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Vereinfacht:

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 - X_2 \geq 0 \\ X_2 - X_1 \geq 0 & X_1 + X_2 \leq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$



Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich $U(E)$:

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_2 - X_1 \geq 0$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 - X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

Weiter vereinfacht:

$$X_1 = X_2$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

Dieses Gleichungssystem ist unlösbar mit ganzen Zahlen.



Lösbarkeit in den rationalen Zahlen

Die Gleichungen

$$X_1 = X_2$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

sind allerdings lösbar für rationale Zahlen.

Theorem

$U(S)$ besitzt keine rationale Lösung

gdw

aus S ist mit 1-Resolution \square herleitbar.



Beweis (1)

Sei S eine Menge von Klauseln, aus der mit 1-Resolution die leere Klausel \square nicht herleitbar ist. Dann gibt es eine konsistente Menge ML von Literalen und eine nicht leere Menge von Klauseln S_0 ohne Einerklauseln, so dass S erfüllbar ist genau dann, wenn $ML \cup S_0$ erfüllbar ist. Ordnet man den positiven Literalen in ML den Wert 1, den negativen Literalen in ML den Wert 0 und allen anderen Atomen den Wert $\frac{1}{2}$ zu, so sind alle Gleichungen in $U(ML \cup S_0)$ erfüllt und damit auch alle Gleichungen in dem ursprünglichen $U(S)$.



Beweis (2)

Kann man aus S mit 1-Resolution die leere Klausel herleiten und ist ML die Menge der Literale, die dabei als Einerklauseln auftreten, dann ist eine Belegung b der Variablen mit rationalen Zahlen eine Lösung für $U(S)$ genau dann, wenn b eine Lösung für $U(ML)$ ist. $U(ML)$ enthält aber nur Gleichungen der Form $x = 1$ oder $x = 0$, so dass jede Lösung eine ganzzahlige Lösung ist. Da aus ML außerdem \square ableitbar ist, existiert auch keine ganzzahlige Lösung.



Beispiel 2

Dieses Beispiel ist die Übersetzung der Klauselmenge S , die wir schon bei der Vorstellung des Davis-Putnam-Verfahrens betrachtet hatten.

$S =$

$$\begin{array}{ll} P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\ \neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$



Beispiel 2

Fortsetzung

$U(S) =$

$$\begin{array}{rccccccc} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & \geq & 1 \\ -X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq & -1 \\ -X_1 & + & & & X_3 & & & \geq & 0 \\ -X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq & -1 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & \geq & 0 \\ & & - & X_2 & & & & \geq & 0 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$$



Beispiel 2

Fortsetzung

$$\begin{array}{rccccccc} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & \geq & 1 \\ -X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq -1 \\ -X_1 & + & & & X_3 & & & \geq 0 \\ -X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq -1 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & \geq 0 \\ & & - & X_2 & & & & \geq 0 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$$

Aus der letzten Ungleichung folgt sofort $X_2 = 0$. Aus der dritten und vorletzten Ungleichung folgt $X_1 = X_3$.



Beispiel 2

Fortsetzung

$$\begin{array}{rccccccc} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & \geq & 1 \\ -X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq -1 \\ -X_1 & + & & & X_3 & & & \geq 0 \\ -X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq -1 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & \geq 0 \\ & & - & X_2 & & & & \geq 0 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$$

Aus der letzten Ungleichung folgt sofort $X_2 = 0$. Aus der dritten und vorletzten Ungleichung folgt $X_1 = X_3$.

Eingesetzt in das Gleichungssystem ergibt sich:

$$\begin{array}{rcccc} 2X_1 & & & \geq & 1 \\ -X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq & -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$



Beispiel 2

$$\begin{array}{rclcl} 2X_1 & & \geq & 1 & \\ -X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq & -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $X_1 = 1$



Beispiel 2

$$\begin{array}{rcll} 2X_1 & & \geq & 1 \\ -X_1 & - & X_4 & \geq -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $X_1 = 1$



Beispiel 2

$$\begin{array}{rclcl} 2X_1 & & \geq & 1 & \\ -X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\ -2X_1 & + & X_4 & \geq & -1 \end{array} \quad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $X_1 = 1$

Eingesetzt in die beiden folgenden Ungleichung ergibt sich

$$\begin{array}{rclcl} - & X_4 & \geq & 0 & \\ + & X_4 & \geq & 1 & \end{array} \quad 0 \leq X_4 \leq 1$$

Dieses System ist sicherlich unerfüllbar.

