Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Der Resolutionskalkül
Syntax

Definition

- Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.

Der Resolutionskalkül
Syntax

Definition

- Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.

Der Resolutionskalkül
Syntax

Definition

- Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- Die **leere Klausel** wird mit $\square$ bezeichnet.

Der Resolutionskalkül
Syntax

Definition

- Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- Die **leere Klausel** wird mit $\square$ bezeichnet.
- Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale,.

Der Resolutionskalkül
Syntax

Definition

- Ein **Literal** ist eine atomare oder eine negierte atomare Formel.
- Eine **Klausel** ist eine endliche Menge von Literalen.
- Die **leere Klausel** wird mit $\square$ bezeichnet.
- Eine Klausel wird interpretiert wie die Disjunktion ihrer Literale,.
- Eine Menge von Klauseln wird interpretiert wie die Konjunktion ihrerKlauseln

Notation

Zu einem Literal L sei $\sim L$ das Literal

$$\sim L := \begin{cases} \neg L & \text{wenn } L \text{ ein Atom ist} \\ L' & \text{wenn } L = \neg L', L' \text{ Atom, ist.} \end{cases}$$

Zu einer Klausel C sei

$$\sim C := \{\sim L | L \in C\}.$$

Die Resolutionsregel
Einfache Version

Definition

- C_1, C_2 Klauseln $p(t_1)$, $\neg p(t_2)$ Literale
- $Var(C_1 \cup \{p(t_1)\}) \cap Var(C_2 \cup \{p(t_2)\}) = \emptyset$
- μ ist allgemeinster Unifikator von $p(t_1)$ und $p(t_2)$.

$$\frac{C_1 \cup \{p(t_1)\} \qquad C_2 \cup \{\neg p(t_2)\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Die Klausel $\mu(C_1 \cup C_2)$ heißt eine *Resolvente* der Eingabeklauseln $C_1 \cup \{p(t_1)\}$ und $C_2 \cup \{\neg p(t_2)\}$.

Die Resolutionsregel
Allgemeine Version

Definition

- C_1, C_2, K_1, K_2 sind Klauseln
- $K_1, K_2 \neq \Box$
- $Var(C_1 \cup K_1) \cap Var(C_2 \cup K_2) = \emptyset$
- μ ist allgemeinster Unifikator von $K_1 \cup \sim K_2$.

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Die Klausel $\mu(C_1 \cup C_2)$ heißt eine *Resolvente* der Eingabeklauseln $C_1 \cup K_1$ und $C_2 \cup K_2$.

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln
$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c))\}$ und $\{r(y,z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln
$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c))\}$ und $\{r(y,z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \qquad \{r(y,z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln
$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c))\}$ und $\{r(y,z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \qquad \{r(y,z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$ ist in diesem Fall $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c))\}$

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln
$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c))\}$ und $\{r(y,z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \qquad \{r(y,z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$ ist in diesem Fall $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c))\}$
Der allgemeinste Unifikator ist $\mu = \{x/g(c),\ y/g(c),\ z/f(g(c))\}$

Anwendung der Resolutionsregel

Regelschema:

$$\frac{C_1 \cup K_1 \qquad C_2 \cup K_2}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

Gegeben seien die beiden Klauseln
$\{p(x), q(f(x)), q(f(g(c))\}$ und $\{r(y,z), \neg q(z), \neg q(f(y))\}$

$$\frac{\{p(x)\} \cup \{q(f(x)), q(f(g(c)))\} \qquad \{r(y,z)\} \cup \{\neg q(z), \neg q(f(y))\}}{\mu(C_1 \cup C_2)}$$

$K_1 \cup \sim K_2$ ist in diesem Fall $\{q(z), q(f(y)), q(f(x)), q(f(g(c))\}$
Der allgemeinste Unifikator ist $\mu = \{x/g(c),\ y/g(c),\ z/f(g(c))\}$
Die Resolvente ist

$$\{p(g(c)), r(g(c), f(g(c)))\}$$

Anwendung der Resolutionskalküls

Sei M eine Klauselmenge.

1. Mit $Res(M)$ bezeichen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus M. Genauer:

$$\begin{aligned} Res(M) = \ & \{B \mid \text{ es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ & \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\} \end{aligned}$$

Anwendung der Resolutionskalküls

Sei M eine Klauselmenge.

1. Mit $Res(M)$ bezeichen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus M. Genauer:

$$\begin{aligned} Res(M) = \ &\{B \mid \text{ es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ &\quad \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\} \end{aligned}$$

2. $R^0(M) = M$

Anwendung der Resolutionskalküls

Sei M eine Klauselmenge.

1. Mit $Res(M)$ bezeichen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus M. Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{ es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2. $R^0(M) = M$
3. $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$

Anwendung der Resolutionskalküls

Sei M eine Klauselmenge.

1. Mit $Res(M)$ bezeichen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus M. Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \text{ so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2. $R^0(M) = M$
3. $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$
4. M ist unerfüllbar genau dann, wenn es ein n gibt mit $\Box \in R^n(M)$

Anwendung der Resolutionskalküls

Sei M eine Klauselmenge.

1. Mit $Res(M)$ bezeichen wir die Menge aller Resolventen von Klauseln aus M. Genauer:

$$Res(M) = \{B \mid \text{ es gibt Varianten } C_1, C_2 \text{ von Klauseln aus } M, \\ \text{so daß } B \text{ eine Resolvente von } C_1, C_2 \text{ ist.}\}$$

2. $R^0(M) = M$
3. $R^{n+1}(M) = Res(R^n) \cup R^n$
4. M ist unerfüllbar genau dann, wenn es ein n gibt mit $\Box \in R^n(M)$
5. $M \vdash_{\mathbf{R}} A$ gilt genau dann, wenn es ein n gibt mit $\Box \in R^n(M \cup \{\neg A\})$

Beispiel 1

Wir wollen die folgende logische Folgerung beweisen:

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y))$$
$$\models$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z)$$

Es handelt sich dabei um eine Aussage aus der elementaren Mengenlehre zur Transitivität der Teilmengenbeziehung.

Bemerkenswert ist vielleicht, daß die Transitivität allein aus der Definition der Teilmengenrelation gefolgert werden soll, ohne zusätzliche mengentheoretische Axiome über die ϵ–Relation.

Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile

$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y))$

$\forall x \forall y (\forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y) \rightarrow x \subseteq y)$

Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile
$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y))$
$\forall x \forall y (\forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y) \rightarrow x \subseteq y)$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg conteq(x, y), \neg memb(u, x), memb(u, y)\}$$

mit *conteq* und *memb* für die Infixzeichen $\subseteq$ und ϵ.

Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile
$\forall x \forall y (x \subseteq y \to \forall u (u \epsilon x \to u \epsilon y))$
$\forall x \forall y (\forall u (u \epsilon x \to u \epsilon y) \to x \subseteq y)$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg conteq(x, y), \neg memb(u, x), memb(u, y)\}$$

mit *conteq* und *memb* für die Infixzeichen $\subseteq$ und ϵ.
Die 2. Formel wird nach Elimination von $\to$ und Skolemisierung zu

$$\forall x \forall y \exists u ((u \epsilon x \land \neg u \epsilon y) \lor x \subseteq y)$$
$$\forall x \forall y ((f(x, y) \epsilon x \land \neg f(x, y) \epsilon y) \lor x \subseteq y)$$

Transformation in Klauselnormalform für die Prämisse

Die Prämisse zerfällt in die beiden Teile
$\forall x \forall y (x \subseteq y \rightarrow \forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y))$
$\forall x \forall y (\forall u (u \epsilon x \rightarrow u \epsilon y) \rightarrow x \subseteq y)$

Die erste Formel wird zu

$$\{\neg conteq(x, y), \neg memb(u, x), memb(u, y)\}$$

mit *conteq* und *memb* für die Infixzeichen $\subseteq$ und ϵ.
Die 2. Formel wird nach Elimination von $\rightarrow$ und Skolemisierung zu

$$\forall x \forall y \exists u ((u \epsilon x \wedge \neg u \epsilon y) \vee x \subseteq y)$$
$$\forall x \forall y ((f(x, y) \epsilon x \wedge \neg f(x, y) \epsilon y) \vee x \subseteq y)$$

Nach Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\{memb(f(x, y), x), conteq(x, y)\}, \{\neg memb(f(x, y), y), conteq(x, y)\}$$

Transformation in Klauselnormalform für die Behauptung

Die Negation der Behauptung führt zu

$$\exists x \exists y \exists z (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \wedge \neg x \subseteq z)$$

und nach Einführung von Skolemkonstanten zu den drei Einerklauseln:

$conteq(a, b)$
$conteq(b, c)$
$\neg conteq(a, c)$

Der Resolutionsbeweis

(1)	$\neg conteq(x,y), \neg memb(u,x), memb(u,y)$	[Vor.]
(2)	$memb(f(x,y),x), conteq(x,y)$	[Vor.]
(3)	$\neg memb(f(x,y),y), conteq(x,y)$	[Vor.]
(4)	$conteq(a,b)$	[$\neg$ Beh.]
(5)	$conteq(b,c)$	[$\neg$ Beh.]
(6)	$\neg conteq(a,c)$	[$\neg$ Beh.]
(7)	$\neg memb(u,a), memb(u,b)$	[4,1]
(8)	$\neg memb(u,b), memb(u,c)$	[5,1]
(9)	$\neg memb(f(a,c),c)$	[6,3]
(10)	$memb(f(a,c),a)$	[6,2]
(13)	$memb(f(a,c),b)$	[7,10]
(19)	$memb(f(a,c),c)$	[8,13]
(20)	$\square$	[19,9]

Dieser Beweis wurde von dem automatischen Beweiser OTTER gefunden.

Beispiel 2

Beweisziel

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \land y \subseteq x \rightarrow x = y).$$

Als Voraussetzungen stehen dazu zur Verfügung

- die Definition der Teilmengenrelation

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

und

Beispiel 2

Beweisziel

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \land y \subseteq x \rightarrow x = y).$$

Als Voraussetzungen stehen dazu zur Verfügung

- die Definition der Teilmengenrelation

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$$

  und

- die Definition der Gleichheit (in der Mengenlehre ist die Gleichheit eine definierte Relation)

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y))$$

Transformation auf Klauselnormalform

(1) $\neg conteq(x, y) \vee \neg memb(u, x) \vee memb(u, y)$
(2) $memb(f(x, y), x) \vee conteq(x, y)$
(3) $\neg memb(f(x, y), y) \vee conteq(x, y)$

mit eq für $=$ liefert die Definition der Gleichheit

(4) $eq(x, y) \vee memb(g(x, y), x) \vee memb(g(x, y), y)$
(5) $eq(x, y) \vee \neg memb(g(x, y), x) \vee \neg memb(g(x, y), y)$
(6) $\neg eq(x, y) \vee memb(u, x) \vee memb(u, y)$
(7) $\neg eq(x, y) \vee \neg memb(u, x) \vee \neg memb(u, y)$

mit der neuen Skolemfunktion $g(x, y)$.

Die Negation der Behauptung führt zu

(8) $conteq(a, b)$
(9) $conteq(b, a)$
(10) $\neg eq(a, b)$

mit den Skolemkonstanten a, b, c

(11)	$\neg memb(x, a) \vee memb(x, b)$	[8,1]
(12)	$\neg memb(x, b) \vee memb(x, a)$	[9,1]
(18)	$memb(g(a, x), b) \vee eq(a, x) \vee memb(g(a, x), x)$	[11,4]
(23)	$\neg memb(g(x, b), a) \vee eq(x, b) \vee \neg memb(g(x, b), x)$	[11,5]
(28)	$memb(g(a, b), b) \vee eq(a, b)$	[Fak 18]
(29)	$\neg memb(g(a, b), a) \vee eq(a, b)$	[Fak 23]
(61)	$memb(g(a, b), b)$	[28,10]
(62)	$memb(g(a, b), a)$	[61,12]
(69)	$eq(a, b)$	[29,62]
(70)	$\square$	[69,10]

Der Beweis wurde wieder mit dem Beweiser OTTER gefunden, der nicht die Mengennotation verwendet und außerdem die Faktorisierungsregel (Fak) benutzt. Man erhält aus dem obigen Beweis einen Beweis ohne Faktorisierung, wenn man die Mengenschreibweise benutzt und die Beweisschritte (28) und (29) einfach wegläßt. Aus (18) und (10) entsteht direkt (61), ebenso kommt man von (23) und (62) direkt zu (69).