Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Tableaukalkül

für

Prädikatenlogik

(ohne Gleichheit)

Tableaukalkül

UniformeNotation

Typ α:

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	–
$0\neg A$	$1A$	–
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ:

F	F_1
$1\forall x A(x)$	$1A(x)$
$0\exists x A(x)$	$0A(x)$

Typ δ:

F	F_1
$1\exists x A(x)$	$1A(x)$
$0\forall x A(x)$	$0A(x)$

Zusammenfassung der Tableauregeln

α-Regel $\dfrac{F}{\begin{matrix}F_1\\F_2\end{matrix}}$ für α-Formeln F

β-Regel $\dfrac{F}{F_1 | F_2}$ für β-Formeln F

γ-Regel $\dfrac{F}{F_1(y)}$ für γ-Formeln F und eine neue Variable y

δ-Regel $\dfrac{F}{F_1(f(x_1, \ldots, x_n))}$ für δ-Formeln F, wobei $x_1, \ldots, x_n$ alle freien Variablen in F sind und f ein neues n-stelliges Funktionssymbol

Zusammenfassung derTableauregeln
(Forts.)

Anfangsregel	$\dfrac{}{0A}$	für die zu beweisende Formel A
		A ohne freie Variable
V-Regel	$\dfrac{}{1B}$	für jedes $B \in M$,
		B ohne freie Variablen

Geschlossene Tableaus

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

Definition

σ *schließt* π, wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- eine der Formeln $0\mathbf{1}$ oder $1\mathbf{0}$ liegt auf π.

σ *schließt* ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt .

Abschlußregel

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ, die π schließt, und
Anwendung von σ auf das ganze Tableau T.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{cl}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & \text{(Start)} \\
| & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) \\
| & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) \\
| & \\
0\ p(Y) & (\gamma\text{-Regel})
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau.

Ein einfaches Beispiel

$$
\begin{array}{lll}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) & (\text{Start}) & \\
\quad | & & \\
1\ \forall x\ p(x) & (\alpha\text{-Regel}) & \\
\quad | & & \\
0\ \exists y\ p(y) & (\alpha\text{-Regel}) & \\
\quad | & & \\
1\ p(X) & (\gamma\text{-Regel}) & \\
\quad | & & \\
0\ p({\color{blue}Y}) & (\gamma\text{-Regel}) &
\end{array}
\quad \xrightarrow[\{{\color{blue}Y}/{\color{red}X}\}]{\text{C-Regel}} \quad
\begin{array}{l}
0\ \forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y) \\
\quad | \\
1\ \forall x\ p(x) \\
\quad | \\
0\ \exists y\ p(y) \\
\quad | \\
1\ p(X) \\
\quad | \\
0\ p({\color{red}X})
\end{array}
$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α- und γ-Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

Ein geschlossenes Tableau

1[]	$0\exists y\forall x p(x,y) \rightarrow \forall x\exists y p(x,y)$
2[1]	$1\exists y\forall x p(x,y)$
3[1]	$0\forall x\exists y p(x,y)$
4[2]	$1\forall x p(x,a)$
5[3]	$0\exists y p(b,y)$
6[4]	$1p(X,a)$
7[5]	$0p(b,Y)$
	geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

Ein offenes Tableau

1[]	$0\forall x\exists y p(x,y) \rightarrow \exists y\forall x p(x,y)$
2[1]	$0\exists y\forall x p(x,y)$
3[1]	$1\forall x\exists y p(x,y)$
4[2]	$0\forall x p(x,Y)$
5[3]	$1\exists y p(X,y)$
6[4]	$0p(f(Y),Y)$
7[5]	$1p(X,g(X))$

$p(f(Y),Y)$ und $p(X,g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$\sigma(X) = \sigma(f(Y))$ und $\sigma(Y) = \sigma(g(X))$

also $\sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$

Mehrfache Anwendung der γ-Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$
Tableaubeweis:

$$
\begin{array}{llll}
1[] & 1p(0) & & \\
2[] & 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) & & \\
3[] & 0p(s(s(0))) & & \\
 & & & \\
4[2] & 1p(X) \rightarrow p(s(X)) & & \\
 & & & \\
5[4] & 0p(X) & 6[4] & 1p(s(X)) \\
 & \sigma_1(X) = 0 & & \\
5a & 0p(0) & 6a & 1p(s(0)) \\
 & & 7[2] & 1p(Y) \rightarrow p(s(Y)) \\
 & 8[7] \quad 0p(Y) & 9[7] & 1p(s(Y)) \\
 & \quad \sigma_2(Y) = s(0) & & \\
 & 8a \quad 0p(s(0)) & 9a & 1p(s(s(0)))
\end{array}
$$

Korrektheit

und

Vollständigkeit

Modellbegriff für Tableaus

Definition

Es seien $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$,
T ein Tableau für A über M und
$\mathcal{D}$ eine Interpretation über $\overline{\Sigma}$,
wobei $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f$ neues Funktionssymbol in $T\}$.
$\mathcal{D}$ heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- $\mathcal{D}$ ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$ für alle F auf π.

Korrektheitslemma

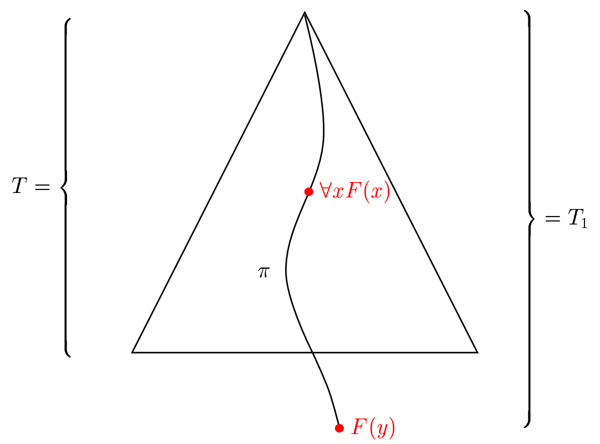
1. Teil

Theorem

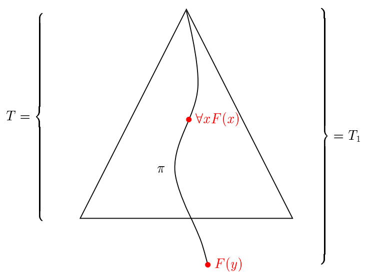
M sei eine Formelmenge.
Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Hat T ein Modell über M, dann auch T'.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall

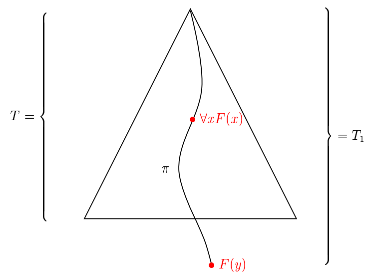


Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



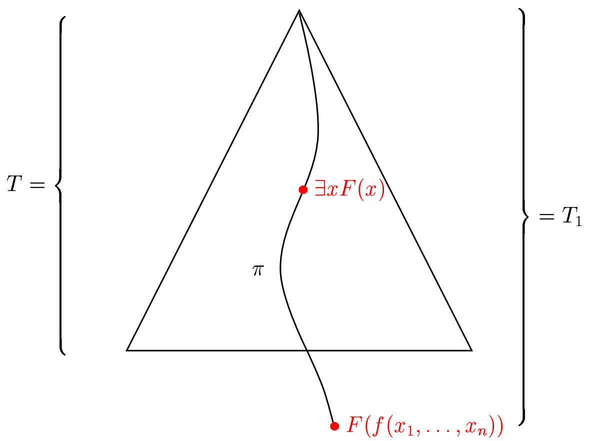
$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.
Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1, fertig.

Beweis des Korrektheitslemma, γ-Fall



$\mathcal{D}$ sei ein Modell von T über M. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}$ auch Modell von T_1 ist.
Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also
$(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall

Nach Voraussetzung sei $\mathcal{D}$ Modell von T über M.

Wir konstruieren eine Interpretation $\mathcal{D}'$, die sich von $\mathcal{D}$ nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \ldots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \ldots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ-Fall
(Forts.)

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{D}'$ Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. $\mathcal{D}'$, β ist auch Belegung bzgl. $\mathcal{D}$, da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.
Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \ldots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von $\mathcal{D}'$ auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \ldots, x_n))$$

.
Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \ldots, x_n)\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Korrektheitslemma
2. Teil

Theorem

- *Ist $\mathcal{D}$ Modell von T über M*
- *und ensteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,*
- *dann ist $\mathcal{D}$ auch Modell von T'.*

Beweis des Korrektheitslemma
2. Teil

Sei β' eine beliebige Belegung.

Gemäß Voraussetzung gibt es zu jeder Belegung β einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta') \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition.

Wir definieren $\beta(y) = val_{\beta'}(\sigma(y))$,

Nach dem Substitutionslemma gilt für alle C

$$(\mathcal{D}, \beta) \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(C)$$

so daß aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$ folgt:

$$(\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(\pi)$$

Anfangstableau

Sei $A \in For_\Sigma, M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen.
Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

Beobachtungen

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Korrektheitssatz des Tableaukalküls

Theorem

Sei $A \in For_\Sigma$, $M \subseteq For_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
$\vdots$		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[] $0\forall x\exists y p(x,y) \rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$
2[1] $0\exists y\forall x p(x,y)$
3[1] $1\forall x\exists y p(x,y)$
4[2] $0\forall x p(x,Y)$
5[3] $1\exists y p(X,y)$
6[4] $0p(f(Y),Y)$
7[5] $1p(X,g(X))$
offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell $\mathcal{D}$ für alle Formeln in π:

$$\begin{aligned} D &= \{a,b\} \\ f^{\mathcal{D}}(x) &= \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases} \\ g^{\mathcal{D}}(x) &= x \\ p^{\mathcal{D}}(x,y) &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Ein offenes Tableau

Vorbereitung auf den Vollständigkeitsbeweis

1[] $0\forall x\exists y p(x,y) \rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$
2[1] $0\exists y\forall x p(x,y)$
3[1] $1\forall x\exists y p(x,y)$
4[2] $0\forall x p(x,Y)$
5[3] $1\exists y p(X,y)$
6[4] $0p(f(Y),Y)$
7[5] $1p(X,g(X))$
8[2] $0\forall x p(x,V)$
9[3] $1\exists y p(U,y)$
10[8] $0p(f(V),V)$
11[9] $1p(U,g(U))$
offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Hintikka-Menge

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
(H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F, dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
(H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F, dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
(H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F, dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.
(H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Modell-Lemma

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:
Wir setzen
$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch
$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:
$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.
Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition
$$I(c) = c.$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \dots, t_n)$:
$$\begin{array}{lll} I(t) & = I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) & \text{(Def. von } I(t)) \\ & = I(f)(t_1, \dots, t_n) & \text{(Ind.Vor.)} \\ & = f(t_1, \dots, t_n) & \text{(Def. von } I(f)) \end{array}$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt
$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.
(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$
Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von $\mathcal{D}$.

2. Fall: $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$.
Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6) $1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$.
Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h.
$(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache Konsequenzen aus (H 1) bis (H 4).

Konstruktionsvorschrift

Es sei $t_1, \dots, t_n, \dots$ eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus $\mathcal{T}_i$ wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht $\mathcal{T}_{i+1}$ aus $\mathcal{T}_i$ durch Anwendung einer γ-Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist
$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und
es sich um die n-te Anwendung der γ-Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau $\mathcal{T}_i$ wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$
dann terminiert jedes

- *faire Verfahren,*
- *das mit $0A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness gewährleistet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.
Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ-Formel unbeschränkt oft benutzt.
und jede Formel aus M kommt einmal dran.

Königs Lemma

In jedem unendlichen, endlich verzweigenden Baum existiert ein unendlicher Pfad.

Beweisansatz

Angenommen die Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \ldots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \ldots$ terminiert nicht.

Wir wollen eine Modell $\mathcal{D}$ finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi$ ist eine Hintikka- Menge.

Hintikka-Menge

Wiederholung

Definition

Eine Menge H geschlossenener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(H 1) Gilt für eine α-Formel F, $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
(H 2) Gilt $F \in H$ für eine β-Formel F, dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
(H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ-Formel F, dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
(H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ-Formel F, dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t.
(H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \land p(b)$	wahr	$p(a) \land p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \land p(z)$	wahr	$p(y) \land p(z)$ über $p(x)$	wahr

Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$ allgemeingültig? Triviale Signaturen Σ ausgenommen.*
2. *Was ist die maximale Anzahl von γ-Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in For_\Sigma$?*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

1. *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
2. *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist nicht rekursiv aufzählbar.*