

Büchi-Automaten

Einführung



Unendliche Wörter

Definition

Sei V ein (weiterhin endliches) Alphabet.

$$V^\omega$$

ist die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben aus V .

$$w(n)$$

bezeichnet den n -ten Buchstaben in w und

$$w \downarrow (n)$$

das endliche Anfangstück $w(0) \dots w(n)$ von w .

Wir nennen ein Wort $w \in V^\omega$ manchmal auch ein ω -Wort über V .

Man kann ein unendliches Wort $w \in V^\omega$ auch als eine Funktion $w : \mathbf{N} \rightarrow V$, von den natürlichen Zahlen in das Alphabet auffassen.

Das leere Wort ε kommt **nicht** in V^ω vor.



Operationen auf unendlichen Wörtern

Sei $K \subseteq V^*$ und $J \subseteq V^\omega$:

1. K^ω bezeichnet die Menge der unendlichen Wörter der Form

$$w_1 \dots w_i \dots \text{ mit } w_i \in K \text{ für alle } i$$

- 2.

$$KJ = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in K, w_2 \in J\}$$

- 3.

$$\vec{K} = \{w \in V^\omega \mid w \downarrow (n) \in K \text{ für unendlich viele } n\}$$

Manche Autoren benutzen $\lim(K)$ anstelle von \vec{K} .



Büchi-Automaten

Definition

Sei $\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein nicht deterministischer endlicher Automat.

Für ein ω -Wort $w \in V^\omega$ nennen wir eine Folge s_0, \dots, s_n, \dots eine *Berechnungsfolge* (Englisch *run*) für w , wenn für alle $0 \leq n$ gilt

$$s_{n+1} \in \delta(s_n, w(n))$$

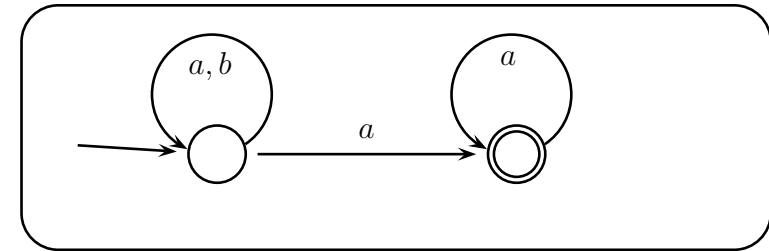
Die von \mathcal{A} akzeptierte ω -Sprache wird definiert durch

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge für } w \text{ mit unendlich vielen Finalzuständen}\}$$

Der einzige Unterschied zwischen Büchi-Automaten und (normalen) endlichen Automaten liegt in der Akzeptanzdefinition.



Beispiel 1

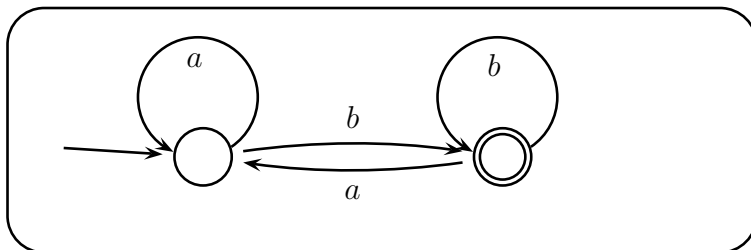


Die akzeptierte Sprache ist

$$\{a, b\}^* a^\omega$$



Beispiel 2



Die akzeptierte Sprache ist

$$(a^* b^+ a)^\omega + (a^* b^+ a)^* b^\omega$$



Entscheidbarkeit

Die Frage, ob für einen Büchi-Automaten \mathcal{B} die Menge der akzeptierten Wörter nicht leer ist, d.h.

$$L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset,$$

ist entscheidbar.

Beweis:

Um $L^\omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ zu zeigen muß man nur einen erreichbaren Endzustand $q_f \in F$ finden, der auf einer Schleife liegt.

Wir nennen eine Menge L von ω -Wörtern ω -**regulär**, wenn es einen Büchi-Automaten \mathcal{A} gibt mit $L^\omega(\mathcal{A}) = L$.



Lemma

Sei \mathcal{A} ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls \mathcal{A} deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 1:

Für $w \in L^\omega(\mathcal{A})$ gibt es eine Berechnungsfolge $\rho_w = s_0, s_1 \dots s_n \dots$, so daß $F_w = \{n \in \mathbf{N} \mid s_n \in F\}$ unendlich ist.
 Für alle $n \in F_w$ gilt $s_n \in F$
 $\Rightarrow w \downarrow (n) \in K$.
 Also $w \in \vec{K}$.



Lemma

Sei \mathcal{A} ein endlicher Automat und $K = L(\mathcal{A})$. Dann gilt

1. $L^\omega(\mathcal{A}) \subseteq \vec{K}$
2. Falls \mathcal{A} deterministisch ist gilt sogar $L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{K}$

Beweis zu 2:

Für $w \in \vec{K}$ ist $R_w = \{n \in \mathbf{N} \mid w \downarrow (n) \in K\}$ unendlich.
 Für jedes $n \in R_w$ gibt es eine Berechnungsfolge $s_n = s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,l_n}$ für $w \downarrow (n)$.
 Da \mathcal{A} deterministisch ist, ist für jedes Paar $n, m \in R_w$ mit $n < m$ s_n Anfangsstück von s_m .
 Zusammengesetzt erhalten wir eine unendliche Berechnungsfolge s für w , die unendlich oft einen Endzustand durchläuft.
 Also $w \in L^\omega(\mathcal{A})$.



*Deterministische Büchi-Automaten
und ihre regulären Mengen*

Korollar

Für eine ω -Sprache $L \subseteq V^\omega$ sind äquivalent:

- $L = L^\omega(\mathcal{A})$ für einen deterministischen Büchi-Automaten
- es eine reguläre Sprache $K \subseteq V^*$ gibt mit $L = \vec{K}$.

Beweis:

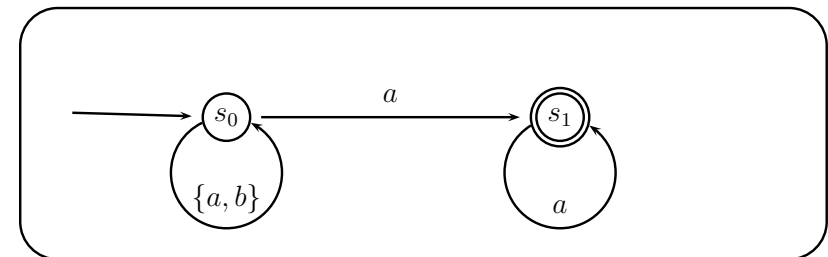
Folgt direkt aus der Tatsache, daß für deterministische Automaten \mathcal{A}

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \vec{L(\mathcal{A})}$$

gilt (vorangeganges Lemma).



Der Beispielautomat N_{bfin}



$L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } b \text{ nur endlich oft vor}\}$
 $L(N_{bfin}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ endet auf } a\}$.
 $Lim(L(N_{bfin})) = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } w \text{ kommt } a \text{ unendlich oft vor}\}$.
 Man sieht leicht, daß $L^\omega(N_{bfin}) \neq Lim(L(N_{bfin}))$



Korollar

Es gibt Sprachen $L \subseteq V^\omega$, die von einem nicht-deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert werden, aber von keinem deterministischen.

Beweis:

Wir wählen $V = \{a, b\}$ und

$$L = L^\omega(N_{bfin}) = \{w \in V^\omega \mid w(n) = b \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Angenommen $L = \vec{K}$ für eine reguläre Menge $K \subseteq V^*$.

Es gibt ein $k_1 > 0$ mit $a^{k_1} \in K$, da $a^\omega \in L$.

Dann gibt es auch ein $k_2 > 0$ mit $a^{k_1}ba^{k_2} \in K$, weil $a^{k_1}ba^\omega \in L$.

So fortfahrend gibt es $k_i > 0$ für alle i mit $a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_i} \in K$.

Wegen $L = \vec{K}$ folgt daraus auch $a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_i}b \dots \in L$

im Widerspruch zur Definition von L .



Sind L_1, L_2 ω -reguläre Sprachen und ist K eine reguläre Sprache, dann ist auch

1. $L_1 \cup L_2$ ω -regulär,
2. K^ω ω -regulär, falls $\epsilon \notin K$,
3. KL_1 ω -regulär,
4. $V^\omega \setminus L_1$ ω -regulär,
5. $L_1 \cap L_2$ ω -regulär.



Beweis

Abschlossenheit unter \cup

Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, V, s_0^i, \delta_i, F_i)$ für $i = 1, 2$ Büchi-Automaten und $L_i = L_i^\omega(\mathcal{A}_i)$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

Wir konstruieren einen Büchi-Automaten $\mathcal{A} = (Q, V, s_0, \delta, F)$, wobei s_0 ein neuer Zustand ist, der weder in Q_1 noch in Q_2 vorkommt.

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_0\} \\ \delta(q, a) &= \delta_i(q, a) \quad \text{falls } q \in Q_i \\ \delta(s_0, a) &= \delta_1(s_0^1, a) \cup \delta_2(s_0^2, a) \\ F &= F_1 \cup F_2 \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß $L^\omega(\mathcal{A}) = L_1 \cup L_2$.



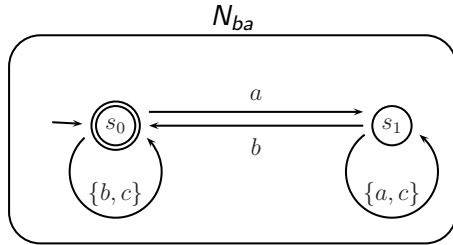
Abgeschlossenheit unter Iteration

Der Automaten $\mathcal{B} = (Q_B, V, s_0^B, \delta_B, F_B)$ sei definiert durch:

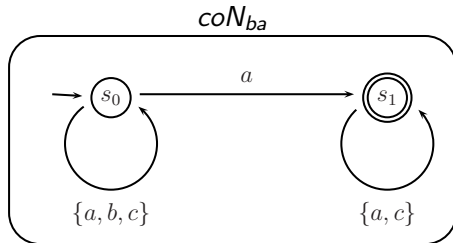
$$\begin{aligned} Q_B &= Q_A \\ s_0^B &= s_0^A \\ \delta_B(q, a) &= \delta_A(q, a) \quad \text{falls } q \in Q_B \\ \delta_B(q, \epsilon) &= \{s_0^B\} \quad \text{falls } q \in F_A \\ F_B &= \{s_0^B\} \end{aligned}$$



Beispiel zur Komplementbildung



$$L^\omega(N_{ba}) = \{w \in \{a, b, c\}^\omega \mid \text{nach jedem } a \text{ kommt ein } b\}$$



Die Abgeschlossenheit
 ω -regulärer Mengen
unter Komplementbildung
muß noch bewiesen werden.
(Siehe Skriptum)



Zerlegungssatz

Satz

$L \subseteq V^\omega$ ist ω -regulär, genau dann, wenn L eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$JK^\omega$$

für reguläre Mengen $J, K \subseteq V^*$ ist, wobei $\varepsilon \notin K$.

Beweis:

Sei $A = (Q, V, s_0, \delta, F)$ ein Büchi-Automat mit $L^\omega(A) = L$.

Für $p, q \in Q$ sei

$$L_{p,q} = \{w \in V^* \mid q \in \delta(p, w)\}$$

Jedes $L_{p,q} \subseteq V^*$ ist eine reguläre Menge. Außerdem gilt

$$L = \bigcup_{p \in F} L_{s_0,p} L_{p,p}^\omega$$



Die umgekehrte Implikation folgt aus den Abschlusseigenschaften.

Varianten von Büchi-Automaten

Menge von Anfangszuständen

Lemma

Zu jedem Büchi-Automaten $\mathcal{C} = (S, V, S_0, \delta, F)$ mit einer Menge von Anfangszuständen gibt es einen Büchi-Automaten \mathcal{A} mit einem einzigen Anfangszustand und

$$L^\omega(\mathcal{C}) = L^\omega(\mathcal{A})$$

Beweis:

Sei $S_i = \{s_1, \dots, s_k\}$.

Wir setzen $\mathcal{C}_i = (S, V, s_i, \delta, F)$.

Offensichtlich gilt $L^\omega(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^k L^\omega(\mathcal{C}_i)$.

Die Existenz von \mathcal{A} folgt jetzt aus dem Beweis der Abgeschlossenheit ω -regulärer Mengen unter Vereinigung.



Ein ω -Wort w wird von dem erweiterten Büchi-Automat

$$\mathcal{A} = (S, V, s_0, \delta, F_1, \dots, F_n)$$

akzeptiert, wenn es eine Berechnungsfolge s für w gibt, die für jedes j , $1 \leq j \leq n$ unendlich viele Zustände aus F_j enthält.

Also

$$L^\omega(\mathcal{A}) = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnungsfolge } s \text{ für } w, \\ \text{so daß für jedes } j, 1 \leq j \leq n, \\ \text{die Menge } \{i \mid s_i \in F_j\} \text{ unendlich ist.}\}$$



Lemma

Zu jedem erweiterten Büchi-Automaten \mathcal{A}_e gibt es einen einfachen Büchi-Automaten \mathcal{A} mit

$$L^\omega(\mathcal{A}_e) = L^\omega(\mathcal{A})$$

