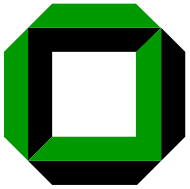
Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

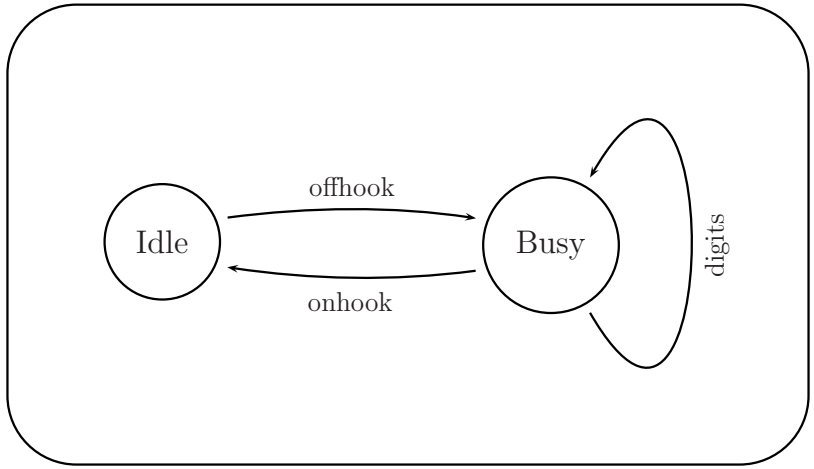


Winter 2008/2009

Lineare Temporale Logik

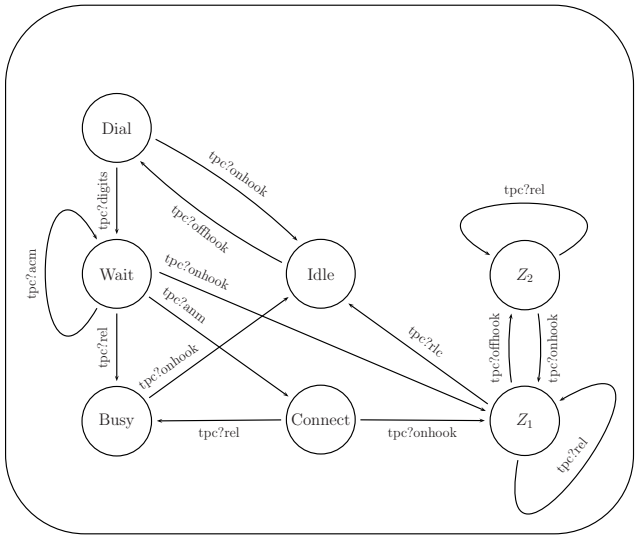
Einführendes Beispiel

Einfaches Modell eines Telefonteilnehmers



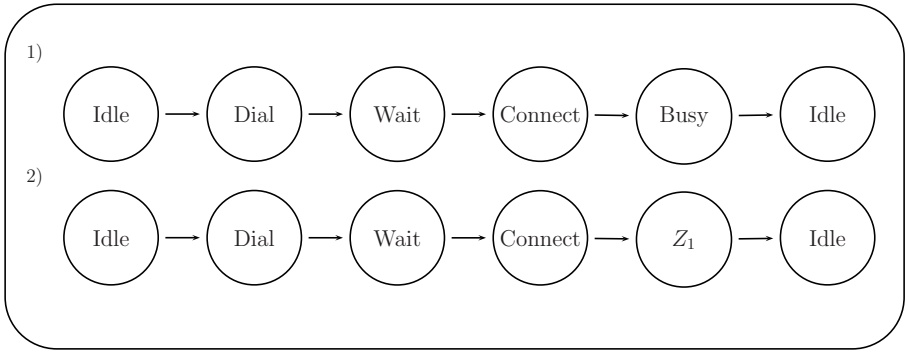
Einführendes Beispiel

Einfacher Automat einer Telefonvermittlung



tpc?*xxx* bedeutet Nachricht *xxx* wird von Kanal *tpc* empfangen
tpc!*xxx* bedeutet Nachricht *xxx* wird über Kanal *tpc* geschickt

Nachricht	Bedeutung
offhook	Hörer wurde abgehoben
onhook	Hörer wurde aufgelegt
digits	Nummer wurde gewählt
iam	initial address message
acm	address complete message
rel	Einleitung des Verbindungsabbaus (release)
anm	End-zu-Endverbindung hergestellt
rlc	Quittierung des Verbindungsabbaus



LTL

Lineare Temporale Logik

Omega-Strukturen

Definition

Eine omega-Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ für eine aussagenlogische Signatur P besteht aus der geordneten Menge der natürlichen Zahlen

$$(\mathbb{N}, <)$$

interpretiert als Menge abstrakter Zeitpunkte und einer Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to 2^P$$

mit der Intention

$$p \in \xi(n) \Leftrightarrow \text{ in } \mathcal{R} \text{ ist } p \text{ zum Zeitpunkt } n \text{ wahr}$$

ξ_n steht für das bei n beginnende Endstück von ξ:

$$\xi_n(m) = \xi(n + m)$$

Inbesondere gilt $\xi_0 = \xi$.

LTL-Formeln: LTLFor

Definition

Σ eine Menge aller AL-Atome. *LTLFor* wird definiert durch

1. $\Sigma \subseteq LTLFor$
2. $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in LTLFor$
3. Liegen A, B in *LTLFor*, dann auch alle aussagenlogischen Kombinationen von A und B.
4. für $A, B \in LTLFor$ gilt auch
   - 4.1 $\Box A \in LTLFor$ und
   - 4.2 $\Diamond B \in LTLFor$ und
   - 4.3 $A \mathbf{U} B \in LTLFor$
   - 4.4 $X A$

Die Symbole $\Box$, $\Diamond$, X und $\mathbf{U}$ heißen temporale Modaloperatoren.

LTL-Semantik

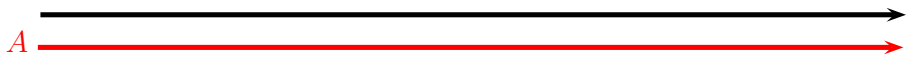
Definition

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur und A eine *LTL* Formel.

$\xi \models p$	gdw	$p \in \xi(0)$ (p ein AL Atom)
$\xi \models op(A, B)$		für AL-Kombinationen $op(A, B)$ von A und B wie üblich
$\xi \models \Box A$	gdw	für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models A$
$\xi \models \Diamond A$	gdw	es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models A$
$\xi \models A \mathbf{U} B$	gdw	es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$
$\xi \models X A$	gdw	$\xi_1 \models A$

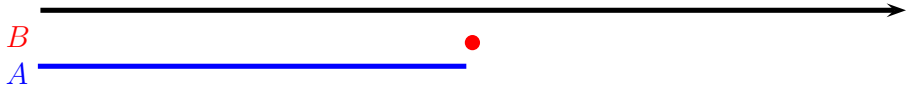
Visualisierung der LTL-Semantik

Szenarium für $\Box A$



Szenarium für $\Diamond A$

Szenarium für $A \mathbf{U} B$



Reduktion auf $\mathbf{U}$ und $\mathbf{1}$

$$\Diamond A \leftrightarrow \quad \mathbf{1} \mathbf{U} A$$
$$\Box A \leftrightarrow \neg(\mathbf{1} \mathbf{U} \neg A)$$

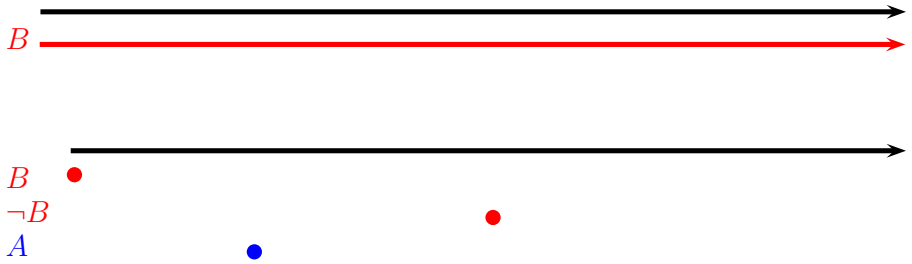
Zusätzliche Operatoren

$\xi \models A \mathbf{U}_w B$ gdw für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_n \models (A \wedge \neg B)$ oder
es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle m mit $0 \leq m < n$ gilt $\xi_m \models A$

$\xi \models A \mathbf{V} B$ gdw $\xi \models B$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
falls $\xi_n \models \neg B$ dann gibt es ein m mit
$0 \leq m < n$ und $\xi_m \models A$

Visualisierung von $\mathbf{V}$

Szenarien für $A \mathbf{V} B$



Lemma

1. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (A \mathbf{U}_w B) \wedge \Diamond B$
2. $A \mathbf{U}_w B \leftrightarrow A \mathbf{U} B \vee \Box(A \wedge \neg B)$
3. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow \neg(\neg A \mathbf{U} \neg B)$
4. $A \mathbf{U} B \leftrightarrow (B \vee (A \wedge X\ (A \mathbf{U} B)))$
5. $A \mathbf{V} B \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (B \wedge X\ (A \mathbf{V} B))$

Beispiel

Sei p ein aussagenlogisches Atom.
Gesucht ist eine LTL-Formel A_{2p}, so daß für jedes ξ gilt

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Leftrightarrow p \in \xi(n))$$

$A_{2p} = p \wedge X\ \neg p \wedge \Box(p \leftrightarrow XX\ p)$

Erstaunlicherweise gibt es keine LTL-Formel A mit

$$\xi \models A_{2p} \quad \text{gdw} \quad (n \text{ ist gerade} \Rightarrow p \in \xi(n))$$

```
REQUIREMENT: When a connection is not made to the server,
    report an error and reset network component to
    initial state.
REFINEMENT: After OpeningNetworkConnection, an
   ErrorMessage will pop up in response to a NetworkError
PATTERN: Response
SCOPE: After
PARAMETERS: Propositional
LTL:  [](OpenNetworkConnection ->
          [](NetworkError -> <>ErrorMessage))
SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}
DOMAIN: GUI
```


```
REQUIREMENT: When a connection is made to the SMTP
   server, all queued messages in the OutBox mail
   will be transferred to the server.
REFINEMENT: Before QueuedMailSent, SMTPServerConnected
PATTERN: Existence
SCOPE: Before
AlTERNATE: Global Precedence
PARAMETERS: Propositional
LTL:  <>QueuedMailSent ->
          (!QueuedMailSent U SMTPServerConnected)
SOURCE: Jeff Isom \cite{isom:98}
DOMAIN: GUI
```