UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23.01.2009 besprochen.

Aufgabe 1

Seien $N := \mathbb{N} \setminus \{1, 0\}$ und $N' := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Die Relation $\succ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert als

$$a \succ b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \text{ teilt } a \text{ und } a \neq b \qquad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie nun die Reduktionssysteme $(N, \succ)$ und $(N', \succ)$:

(a) Ist $(N, \succ)$ lokal konfluent? Ist $(N', \succ)$ lokal konfluent?
(b) Ist $(N, \succ)$ konfluent? Ist $(N', \succ)$ konfluent?
(c) Ist $(N, \succ)$ noethersch? Ist $(N', \succ)$ noethersch?
(d) Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche? Besitzt $(N, \succ)$ irreduzible Elemente? Wenn ja, welche?

Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
Bemerkung: Mit $\succ$ ist jeweils die Einschränkung auf $N \times N$ bzw. $N' \times N'$ gemeint.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Signatur

$$\Sigma_{\text{Stack}} = (\{\text{push}, \text{pop}, \text{null}\}, \emptyset, \alpha) \text{ mit } \alpha(\text{push}) = \alpha(\text{pop}) = 1, \alpha(\text{null}) = 0.$$

Das Gleichungssystem E_{Stack} bestehe aus den Gleichungen

$$\text{pop}(\text{push}(s)) \doteq s \tag{1}$$
$$\text{pop}(\text{null}) \doteq \text{null} \tag{2}$$

(a) Ist das Termersetzungssystem $(\Sigma_{\text{Stack}}, E_{\text{Stack}})$ kanonisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gegeben sei der Term $t \in Term_{\Sigma_{\text{Stack}}}$ mit

$$t = \text{push}(\text{pop}(\text{pop}(\text{push}(\text{push}(\text{push}(\text{pop}(\text{null}))))))) \;.$$

Gibt es einen eindeutigen irreduziblen Term t_{irr} mit $t \rightarrow_{E_{\text{Stack}}} t_{irr}$? Geben Sie ihn samt einer Ableitung an, falls er existiert.

(c) Geben Sie die Menge aller irreduziblen Terme an.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Signatur

$$\Sigma_{AL} = (\{\text{and}, \text{or}, \text{impl}, \text{not}, P_1, P_2, \ldots\}, \emptyset, \alpha)$$

mit

$$\alpha(\text{and}) = \alpha(\text{or}) = \alpha(\text{impl}) = 2, \alpha(\text{not}) = 1, \alpha(P_i) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad .$$

Eine *Formel* der Aussagenlogik kann damit als prädikatenlogischer *Term* über der Signatur Σ_{AL} formuliert werden, z.B. entsprechen die Formel $P_1 \wedge (P_2 \rightarrow P_3)$ und der Term $\text{and}(P_1, \text{impl}(P_2, P_3))$ einander.

Geben Sie ein Termersetzungssystem E_{knf} an, das einen Term über Σ_{AL} in konjunktive Normalform überführt. Ist Ihr System noethersch, lokal konfluent und/oder konfluent?

Aufgabe 4

Ein noethersches, nicht-konfluentes Termersetzungssystem (Σ, E) kann unter Umständen durch Hinzufügen weiterer Gleichungen zu E zu einem kanonischen Termersetzungssystem vervollständigt werden, ohne dass die Menge der daraus logisch folgenden Gleichheiten verändert würde.

Die Signatur Σ enthalte im Folgenden die Funktionssymbole a, b, c, f, g.

(a) Vervollständigen Sie das Termersetzungsystem (Σ, E), wobei E aus der einzelnen Gleichung

$$f(f(x)) \doteq g(x, x)$$

besteht.

(b) Vervollständigen Sie das Termersetzungsystem (Σ, E), wobei E aus den drei Gleichung

$$\begin{aligned} c &\doteq a \\ f(x, b) &\doteq x \\ f(b, z) &\doteq c \end{aligned}$$

besteht.

(c) Zeigen Sie:

Enthält E eine Gleichung $l \doteq r$, so dass der Term r eine Variable enthält, die in l nicht vorkommt, so gilt: Das Termersetzungssystem (Σ, E) ist nicht noethersch.