UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 5

Dieses Blatt wurde in der Übung am 12.12.2008 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Nummeriere die gegebenen Klauseln (1) bis (5).

(6)	$\{\neg p(f(x_1), x_4), p(x_1, x_4)\}$	[1, 2]	$\mu = \{x_2/x_1, x_3/f(x_1)\}$
(7)	$\{p(f(x_1), x_1)\}$	[1, 5]	$\mu = \{x_5/f(x_1), x_6/x_1\}$
(8)	$\{p(x_1, x_1)\}$	[6, 7]	$\mu = \{x_4/x_1\}$
(9)	$\{\neg p(d, g(x_7))\}$	[8, 4]	$\mu = \{x_1/c\}$
(10)	$\{\neg p(g(x_7, d))\}$	[9, 5]	$\mu = \{x_5/d, x_6/g(x_7)\}$
(11)	$\square$	[10, 3]	$\mu = \{x_8/d, x_7/d\}$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn man in einigen Klauseln Struktur erkennt: Klausel (2) besagt, dass p transitiv ist und (5), dass p symmetrisch ist. Dies kann man verwenden, um $p(x, x)$ zu resolvieren. Eine zweite Anwendung der Symmetrie sorgt dann für den endgültigen Abschluss.

Zu Aufgabe 2

(a) Formalisierung über der angegebenen Signatur:

- $\exists x \; g(x)$
- $\forall x \; (g(x) \to g(d(x)))$
- $\forall x \; (g(x) \leftrightarrow \neg u(x))$

Beh.: $\exists x \; \neg u(d(d(x)))$

(b) Transformation der Negation in Skolemnormalform:

KNF: $\exists x \; g(x) \wedge \forall x \; (\neg g(x) \vee g(d(x))) \wedge \forall x \; \big((g(x) \vee u(x)) \wedge \neg(g(x) \vee \neg u(x))\big) \wedge \neg\exists x \; \neg u(d(d(x)))$

Pränex: $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big(g(x_1) \wedge (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3))\big) \wedge u(d(d(x_4)))$

Skolem: $\forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \big(g(c) \wedge (\neg g(x_2) \vee g(d(x_2))) \wedge (g(x_3) \vee u(x_3)) \wedge (\neg g(x_3) \vee \neg u(x_3)) \wedge u(d(d(x_4)))\big)$

(c) Resolution: Nummeriere die Klauseln (1) bis (5), bennene ggf. Variablen um.

(1)	$\{g(c)\}$		
(2)	$\{\neg g(x_2), g(d(x_2))\}$		
(3)	$\{g(x_3), u(x_3)\}$		
(4)	$\{\neg g(x_4), \neg u(x_4)\}$		
(5)	$\{u(d(d(x_5)))\}$		
(6)	$\{g(d(c))\}$	[1, 2]	$\mu = \{x_2/c\}$
(7)	$\{g(d(d(c)))\}$	[6, 2]	$\mu = \{x_2/d(c)\}$
(8)	$\{\neg u(d(d(c)))\}$	[6, 4]	$\mu = \{x_4/d(d(c))\}$
(9)	$\square$	[8, 5]	$\mu = \{x_5/c\}$

Zu Aufgabe 3

Das Herbrand-Universum ist $D_H = \{\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}b)\ldots)) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(a) Unendlich[1] viele. Für $I(p)$ kann jede beliebige Teilmenge der (unendlich großen) Menge D_H gewählt werden. $I(f)$ ist nicht veränderbar.

(b) 3, nämlich (D, I_0), (D, I_1) und (D, I_2) mit

$$\begin{array}{lllllll} I_0(p) = \{ & b, & f(b), & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \\ I_1(p) = \{ & & f(b), & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \setminus \{b\} \\ I_2(p) = \{ & & & f(f(b)), & f(f(f(b))), \ldots\} = D_H \setminus \{b, f(b)\} \end{array}$$

(c) Um das gewünschte Resultat zu erzielen, muss man ein Universum wählen, in dem nicht jedes Element durch f und b dargestellt werden kann.

Sei also $D = D_H \cup \{c\}$. Es gibt keinen Grundterm t, für den $\text{val}(t) = c$ in Herbrand-Interpretationen gelten kann. Ist nun $I(p) = D_H$ (also ohne c) und $I(f)(c) = c$ und I identisch zu I_H, wo letzteres definiert ist, so gilt offensichtlich (1), da diese Formel keine Bedingungen an c stellt. (2) gilt jedoch nicht, da $\text{val}_{I,\beta}(p(f(f(x)))) = F$ für $\beta(x) = c$ ist.

Alternative Lösung: Wähle (D, I) mit $D = \mathbb{Z}$, $I(f) : x \mapsto x{+}1$, $I(b) = 0$, und $I(p) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$. Auch dann ist (1) erfüllt, nicht aber (2).

Zu Aufgabe 4

(a) $\sigma_3 = \neg\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (p(x_1, x_2) \wedge p(x_2, x_3) \wedge p(x_3, x_1))$

(b) $\sigma_n = \neg\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (p(x_1, x_2) \wedge p(x_2, x_3) \wedge \ldots \wedge p(x_{n-1}, x_n) \wedge p(x_n, x_1))$
$Z = \{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) Angenommen, es gebe eine (möglicherweise unendlich große) Formelmenge S, deren Modelle als Graphen gerade die Graphen mit Zyklus sind.

Dann hat die Menge $S \cup Z$ kein Modell. Denn während S fordert, dass ein Modell (mind.) **einen** Zyklus hat, sorgt Z dafür, dass es **keinen** Zyklus hat.

Jede endliche Teilmenge $E \subset S \cup Z$ hat ein Modell: Es gibt eine Schranke $N \in \mathbb{N}$ mit $\sigma_i \in E \implies i < N$. Dann gibt es aber ein Modell (z.B. $D = \{1, ..., N\}$ mit $1 \overset{I(p)}{\to} 2 \overset{I(p)}{\to} \ldots \overset{I(p)}{\to} N \overset{I(p)}{\to} 1$), das einen Zyklus enthält, aber keinen, der durch ein $\sigma_i \in E$ der Erfüllung widerspräche.

Also: Jede endl. Teilmenge $E \subset S \cup Z$ hat ein Modell und $S \cup Z$ hat kein Modell. Dies ist aber ein Widerspruch zum Kompaktheitssatz (Satz 5.41 im Skriptum).

[1] sogar überabzählbar unendlich