

**Vorlesung**

# **Logik für Informatiker**

**1. Einführung**

**Bernhard Beckert**



**Universität Koblenz-Landau**

**Sommersemester 2006**

# Formale Logik

## Ziel

- **Formalisierung und Automatisierung rationalen Denkens**
- **Rational richtige Ableitung von neuem Wissen aus gegebenem**

# Formale Logik

## Ziel

- **Formalisierung und Automatisierung rationalen Denkens**
- **Rational richtige Ableitung von neuem Wissen aus gegebenem**

## Rolle der Logik in der Informatik

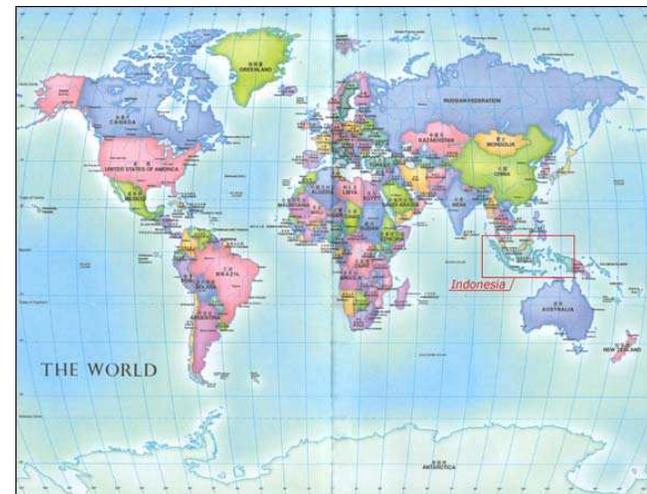
- **Anwendung innerhalb der Informatik**  
**Spezifikation, Programmentwicklung, Programmverifikation**
- **Werkzeug für Anwendungen außerhalb der Informatik**  
**Künstliche Intelligenz, Wissensrepräsentation**

# Modellierung

# Modellierung



**Abstraktion**



# Modellierung: Adäquatheit des Modells

## Adäquatheit

**Wenn formulierbare Aussage wahr im Modell,  
dann entsprechende Aussage wahr in Wirklichkeit**

# Modellierung: Beispiel Aufzug



# Modellierung: Beispiel Aufzug



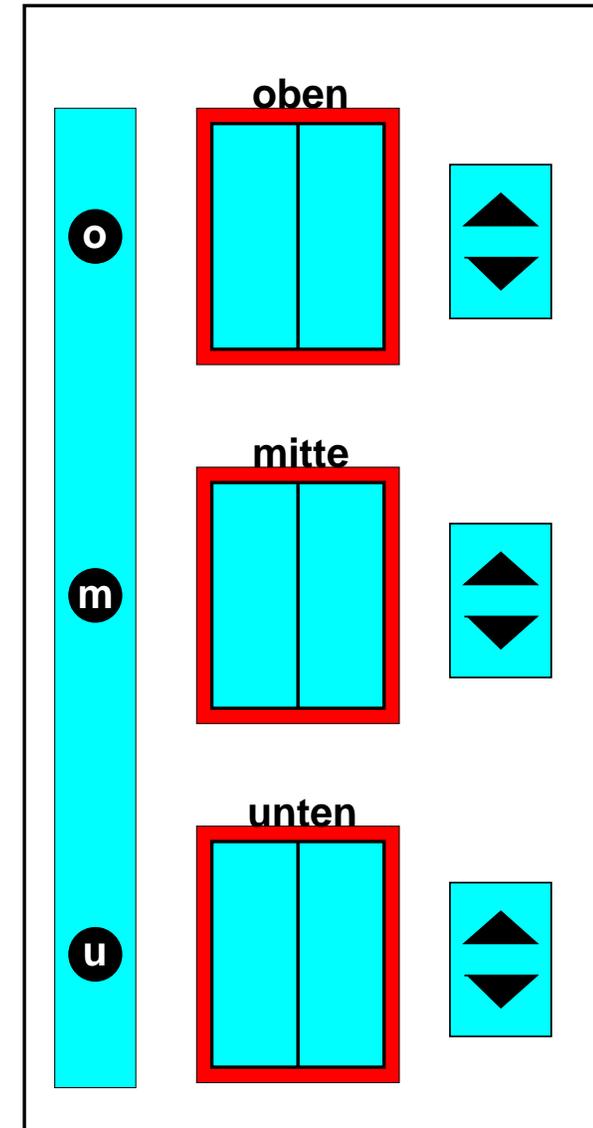
Modellierung der  
statischen  
Eigenschaften



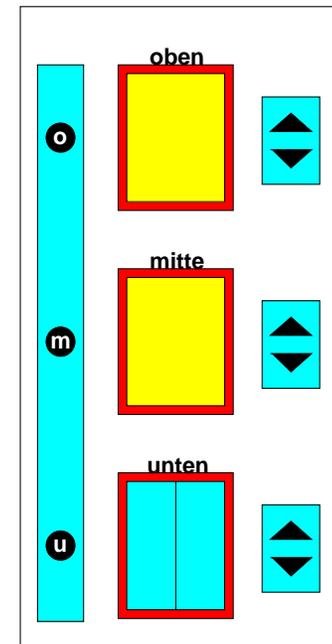
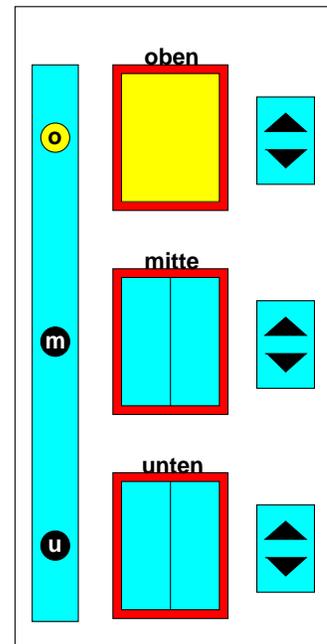
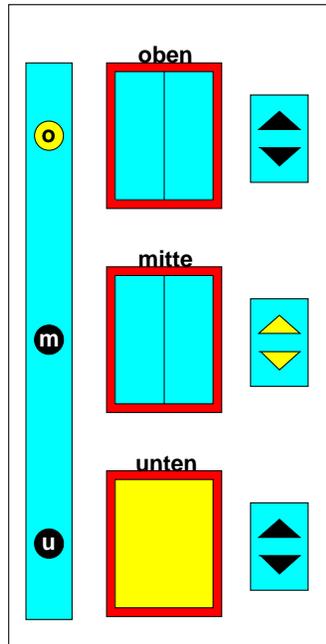
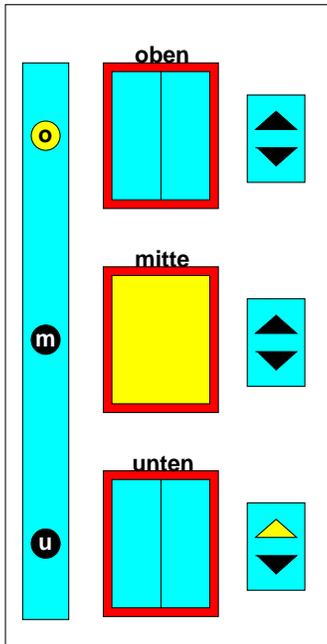
# Modellierung: Beispiel Aufzug



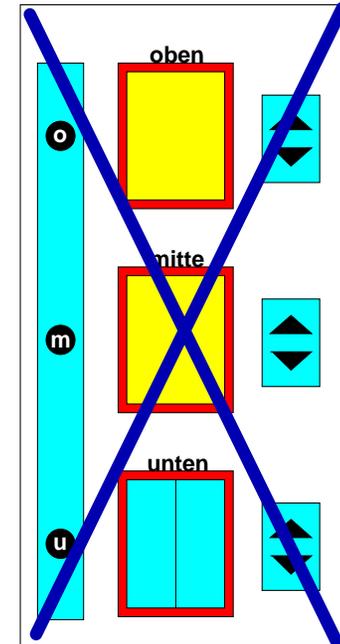
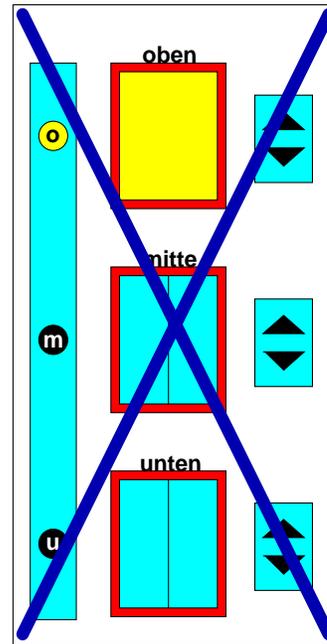
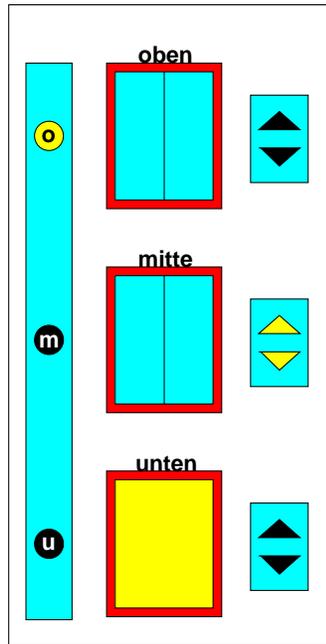
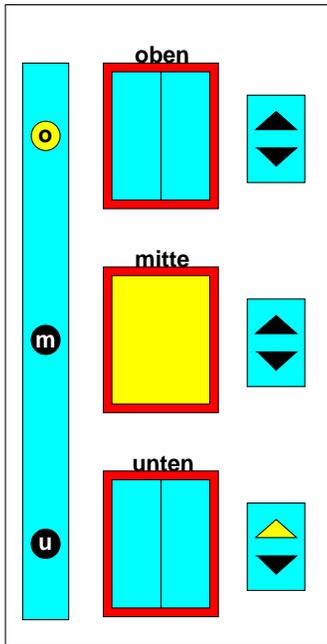
Modellierung der  
statischen  
Eigenschaften



# Modellierung: Strukturen

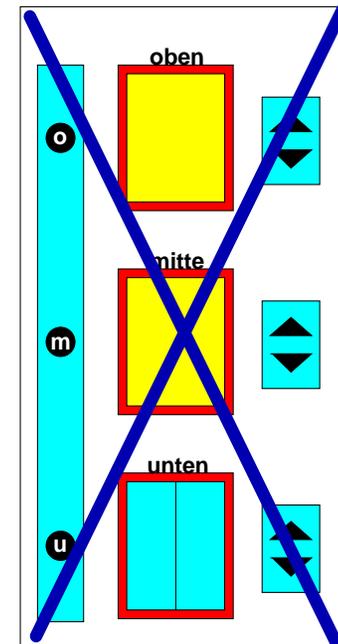
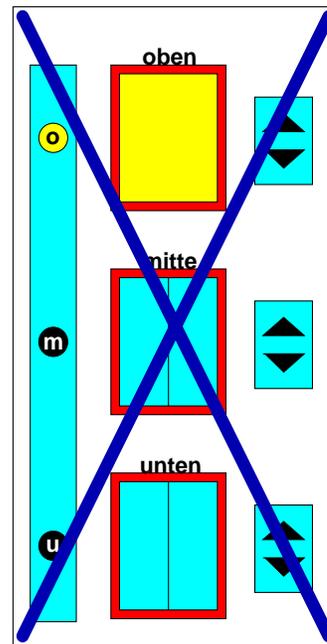
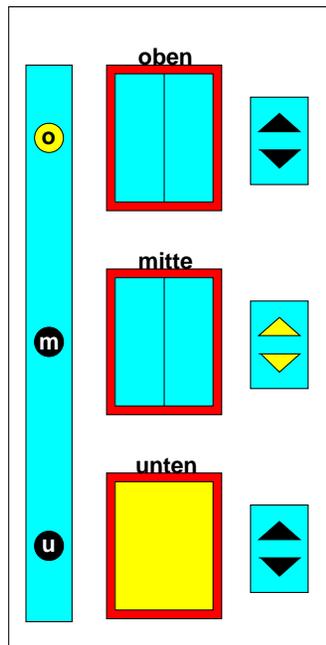
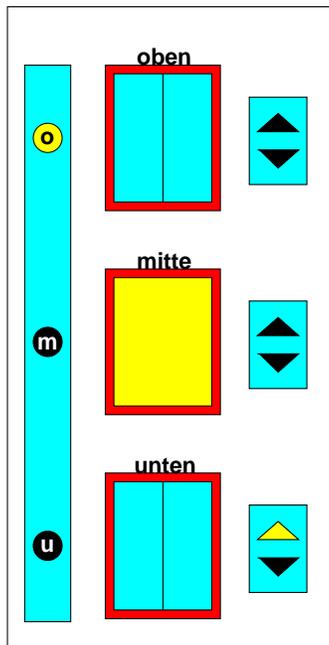


# Modellierung: Strukturen



...

# Modellierung: Strukturen



**Aussagen beziehen sich auf Strukturen**

**(Formale) Aussagen sind in jeder einzelnen Struktur zu wahr oder falsch auswertbar**

# Formale Logik

▶ **Syntax**

- Welche Formeln?

# Formale Logik

▶ **Syntax**

– Welche Formeln?

▶ **Semantik**

– Wann ist eine Formel wahr  
(in einer Struktur)?

# Formale Logik

- ▶ **Syntax**
  - Welche Formeln?
- ▶ **Semantik**
  - Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- ▶ **Deduktionsmechanismus**
  - Ableitung neuer wahrer Formeln

# Aussagenlogik: Syntax

## Atomare Aussagen

**Aufzug ist oben**

*aufzugOben*

**Innen mittlerer Knopf gedrückt**

*innenMitteGedrückt*

# Aussagenlogik: Syntax

## Atomare Aussagen

Aufzug ist oben

*aufzugOben*

Innen mittlerer Knopf gedrückt

*innenMitteGedrückt*

## Verknüpft mit logischen Operatoren

und

$\wedge$

oder

$\vee$

impliziert

$\rightarrow$

nicht

$\neg$

# Aussagenlogik: Syntax

## Komplexe Aussagen

Wenn innen mittlerer Knopf gedrückt, dann Aufzug nicht in der Mitte

*innenMitteGedrückt*  $\rightarrow$   $\neg$ *aufzugMitte*

# Aussagenlogik: Syntax

## Komplexe Aussagen

Wenn innen mittlerer Knopf gedrückt, dann Aufzug nicht in der Mitte

$$\textit{innenMitteGedrückt} \rightarrow \neg \textit{aufzugMitte}$$

Der Aufzug ist oben und der Aufzug ist nicht unten

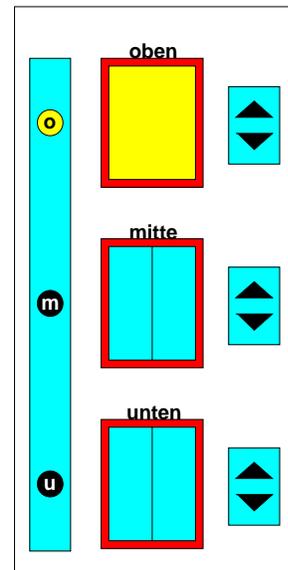
$$\textit{aufzugOben} \wedge \neg \textit{aufzugUnten}$$

# Aussagenlogik: Semantik

Der Aufzug ist oben und der Aufzug ist nicht unten

$aufzugOben \wedge \neg aufzugUnten$

ist wahr in



# Aussagenlogik: Deduktionsmechanismus

## Syllogismen

$$\frac{P \rightarrow \neg Q}{Q} \quad \frac{}{\neg P}$$

# Aussagenlogik: Deduktionsmechanismus

## Syllogismen

$$\begin{array}{c} P \rightarrow \neg Q \\ Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{aufzugOben} \rightarrow \neg \text{aufzugUnten} \\ \text{aufzugUnten} \\ \hline \neg \text{aufzugOben} \end{array}$$

# Deduktionsmechanismus

Deduktionsmechanismus im allgemeinen

Kalkül

# Deduktionsmechanismus

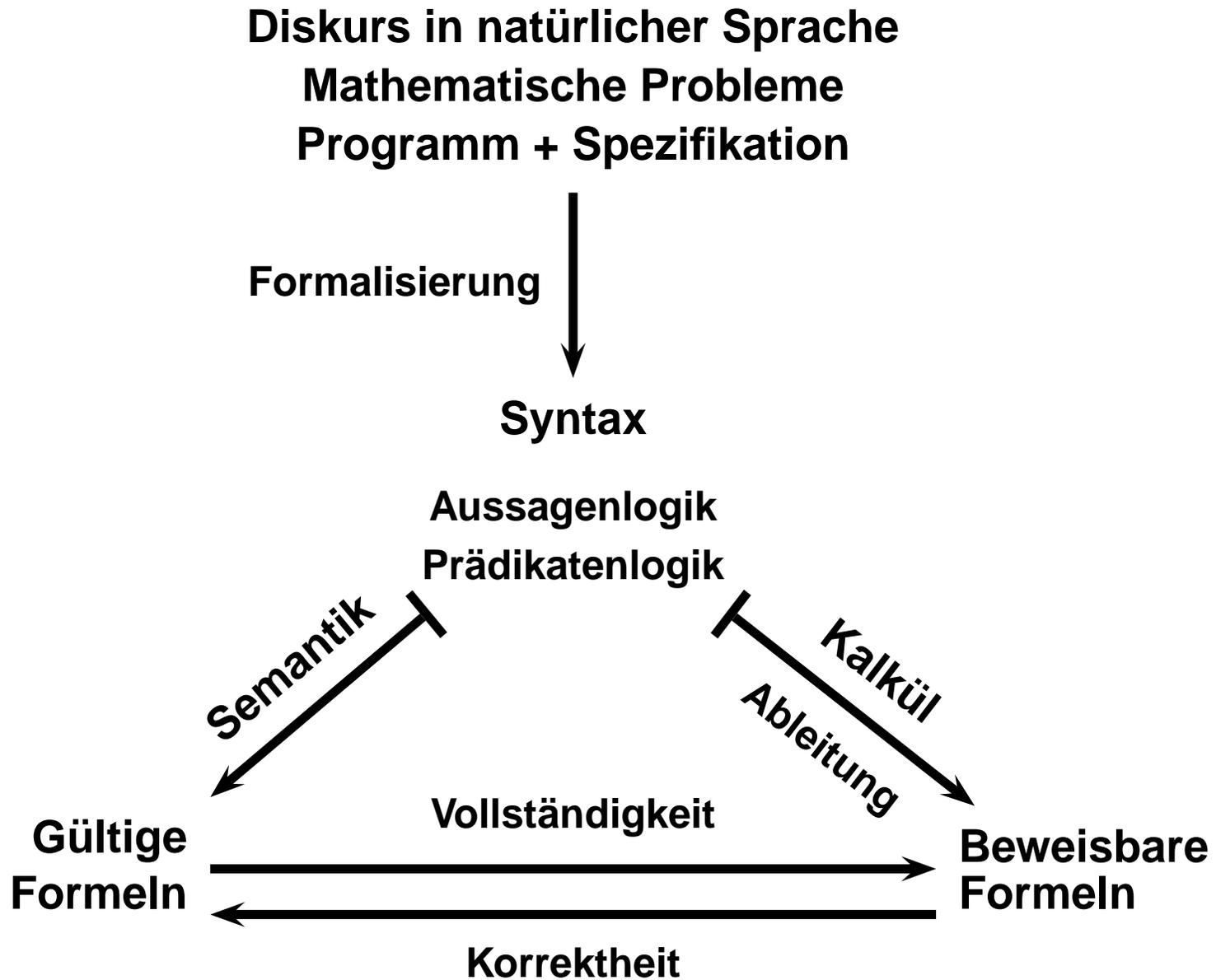
## Deduktionsmechanismus im allgemeinen

Kalkül

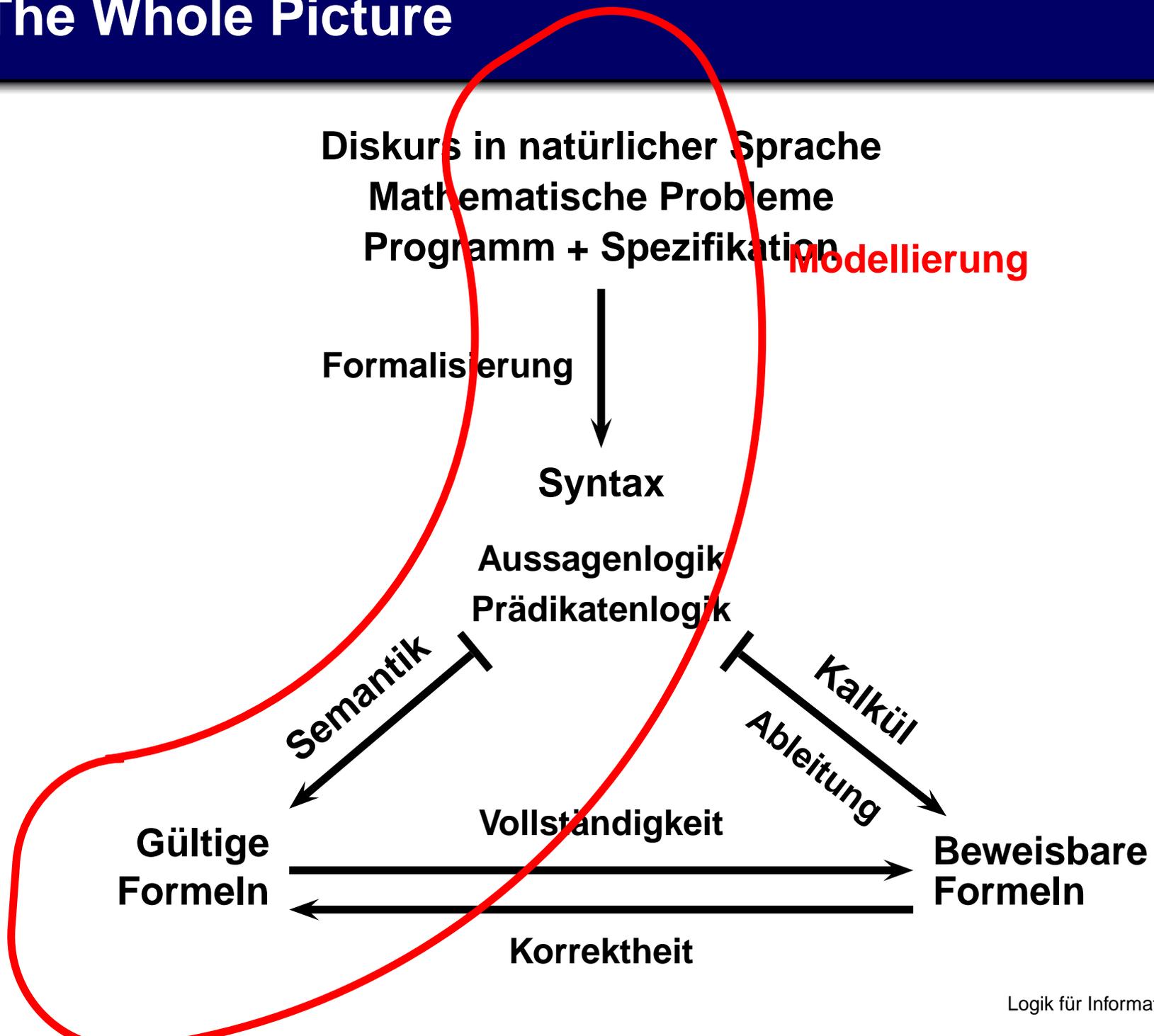
## In dieser Vorlesung

- Wahrheitstafeln
- Logische Umformung
- Resolutionskalkül
- Tableaukalkül

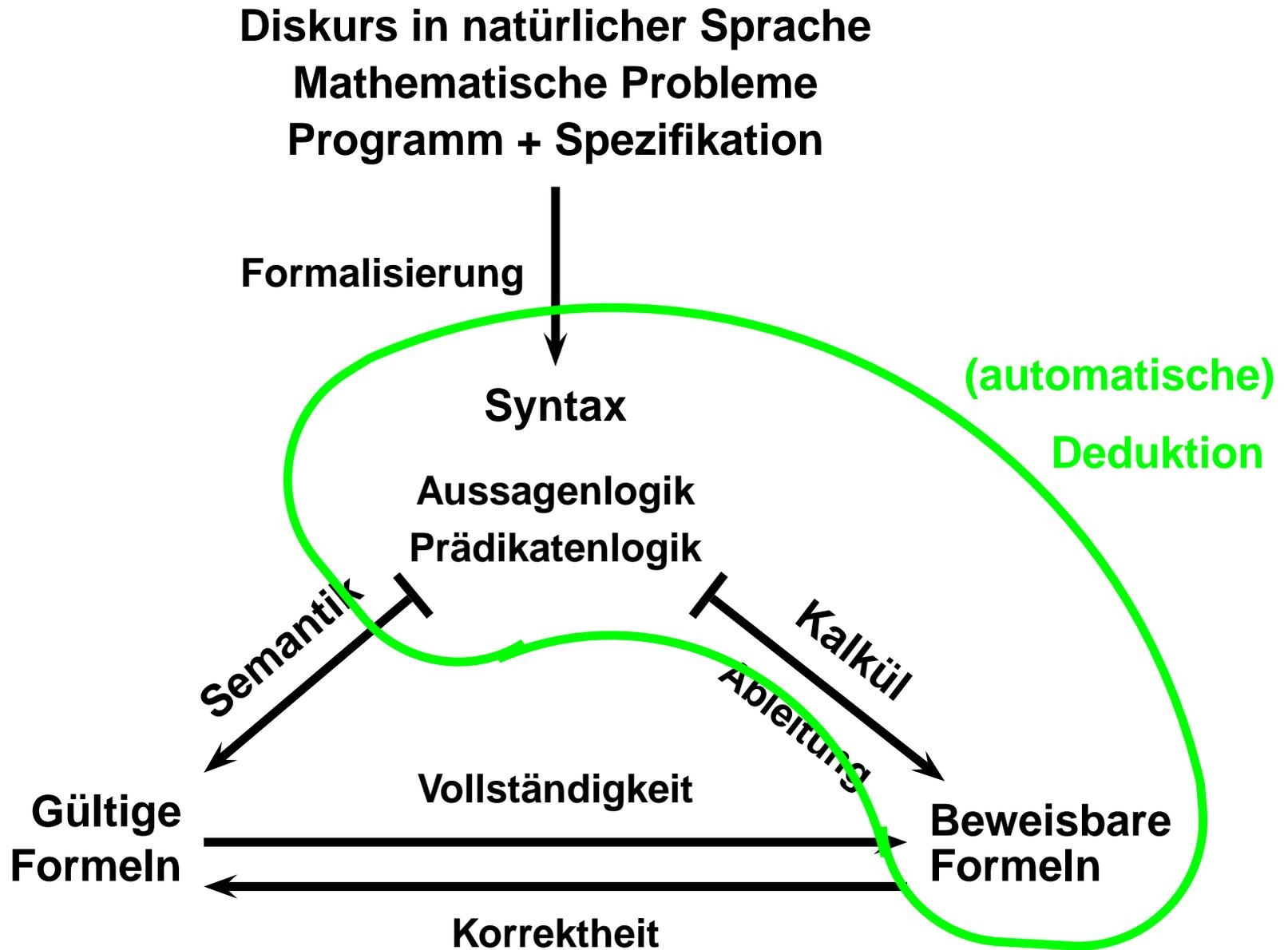
# The Whole Picture



# The Whole Picture



# The Whole Picture



# Inhalt der Vorlesung

## 1. Einführung

# Inhalt der Vorlesung

## 1. Einführung

## 2. Aussagenlogik

- **Syntax und Semantik**
- **Resolution, Vollständigkeits- und Korrektheitsbeweise**
- **Analytische Tableaus**

# Inhalt der Vorlesung

## 1. Einführung

## 2. Aussagenlogik

- **Syntax und Semantik**
- **Resolution, Vollständigkeits- und Korrektheitsbeweise**
- **Analytische Tableaus**

## 3. Prädikatenlogik

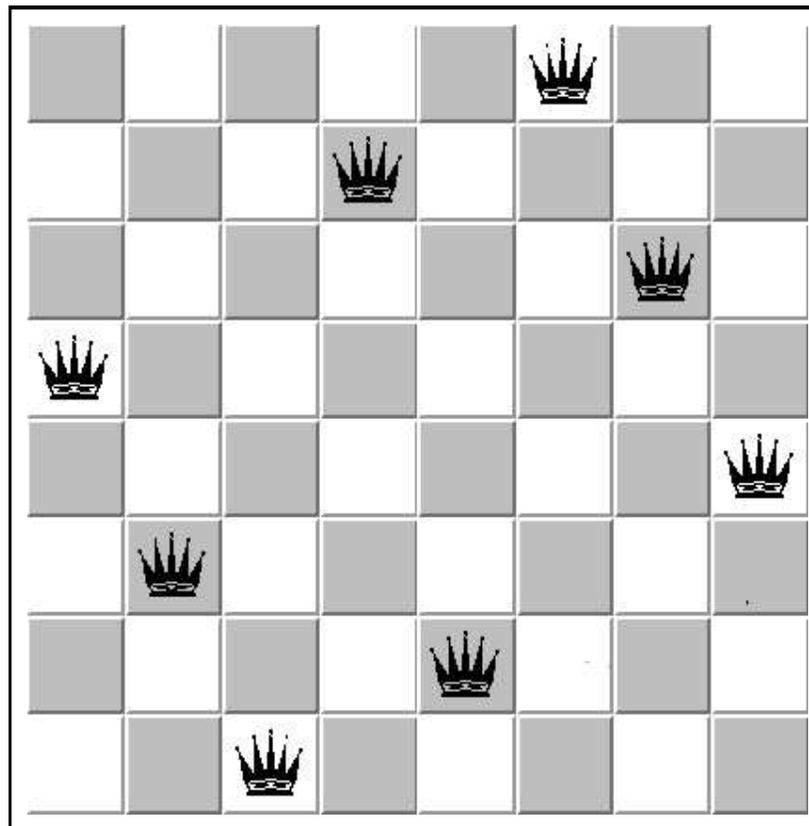
- **Syntax und Semantik**
- **Resolution, Vollständigkeits- und Korrektheitsbeweise**
- **Analytische Tableaus**

# Das 8-Damen Problem

**Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.**

# Das 8-Damen Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



# Das 8-Damen Problem

## Aussagenlogische Beschreibung des Problems

# Das 8-Damen Problem

## Aussagenlogische Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

$$D_{i,j}$$

Mit der Vorstellung, dass  $D_{i,j}$  den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld  $(i, j)$  eine Dame steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

# Das 8-Damen Problem

**Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame**

# Das 8-Damen Problem

**Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame**

## Einschränkungen pro Feld

$FE_{5,7} \equiv$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{5,8} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{1,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{8,7}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{6,8} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$$

$$D_{5,7} \rightarrow \neg D_{4,8} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$$

# Das 8-Damen Problem

## Globale Einschränkungen

Für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq 8$ :

$$D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$$

# Das 8-Damen Problem

Eine aussagenlogische Struktur beschreibt eine Lösung des Acht-Damen-Problems genau dann, wenn sie ein Modell der Formeln

$$F_{i,j} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq 8$$

$$R_k \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq 8$$

ist

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**
- **Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Semantik, Syllogismen**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**
- **Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Semantik, Syllogismen**
- **The Whole Picture:**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**
- **Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Semantik, Syllogismen**
- **The Whole Picture:**
  - **Formel in der “wahren Welt” / (semantisch) gültige Formel,  
gültige Formel / ableitbare Formel**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**
- **Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Semantik, Syllogismen**
- **The Whole Picture:**
  - **Formel in der “wahren Welt” / (semantisch) gültige Formel,  
gültige Formel / ableitbare Formel**
  - **Vollständigkeit und Korrektheit von Kalkülen**

# Einführung: Zusammenfassung

- **Ziel und Rolle der Formalen Logik in der Informatik**
- **Modellierung, Adäquatheit der Modellierung**
- **Wesentliche Komponenten für jede Logik:  
Syntax, Semantik, Deduktionsmechanismus (Kalkül)**
- **Beispiel Aussagenlogik: Syntax, Semantik, Syllogismen**
- **The Whole Picture:**
  - **Formel in der “wahren Welt” / (semantisch) gültige Formel,  
gültige Formel / ableitbare Formel**
  - **Vollständigkeit und Korrektheit von Kalkülen**
- **Beispiel für (nicht-triviale) aussagelogische Modellierung:  
Acht-Damen-Problem**