

**Vorlesung**

# **Logik für Informatiker**

**3. Aussagenlogik**

**– Einführung: Logisches Schließen im Allgemeinen –**

**Bernhard Beckert**



**Universität Koblenz-Landau**

**Sommersemester 2006**

# Beispiel: Wumpus-Welt

## Performance measure

gold +1000, death -1000  
-1 per step, -10 for using the arrow

## Sensors

Smell in squares adjacent to wumpus

Breeze in squares adjacent to pit

Glitter iff gold is in the same square

## Actuators

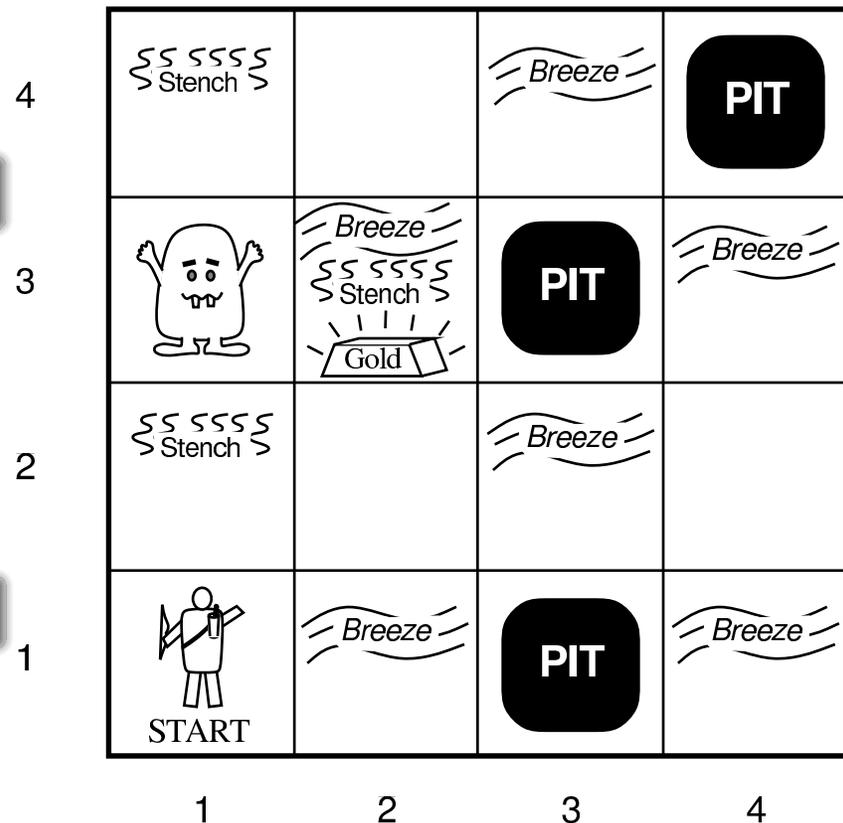
Left turn

Right turn

Forward

Shoot (kills wumpus if facing it)

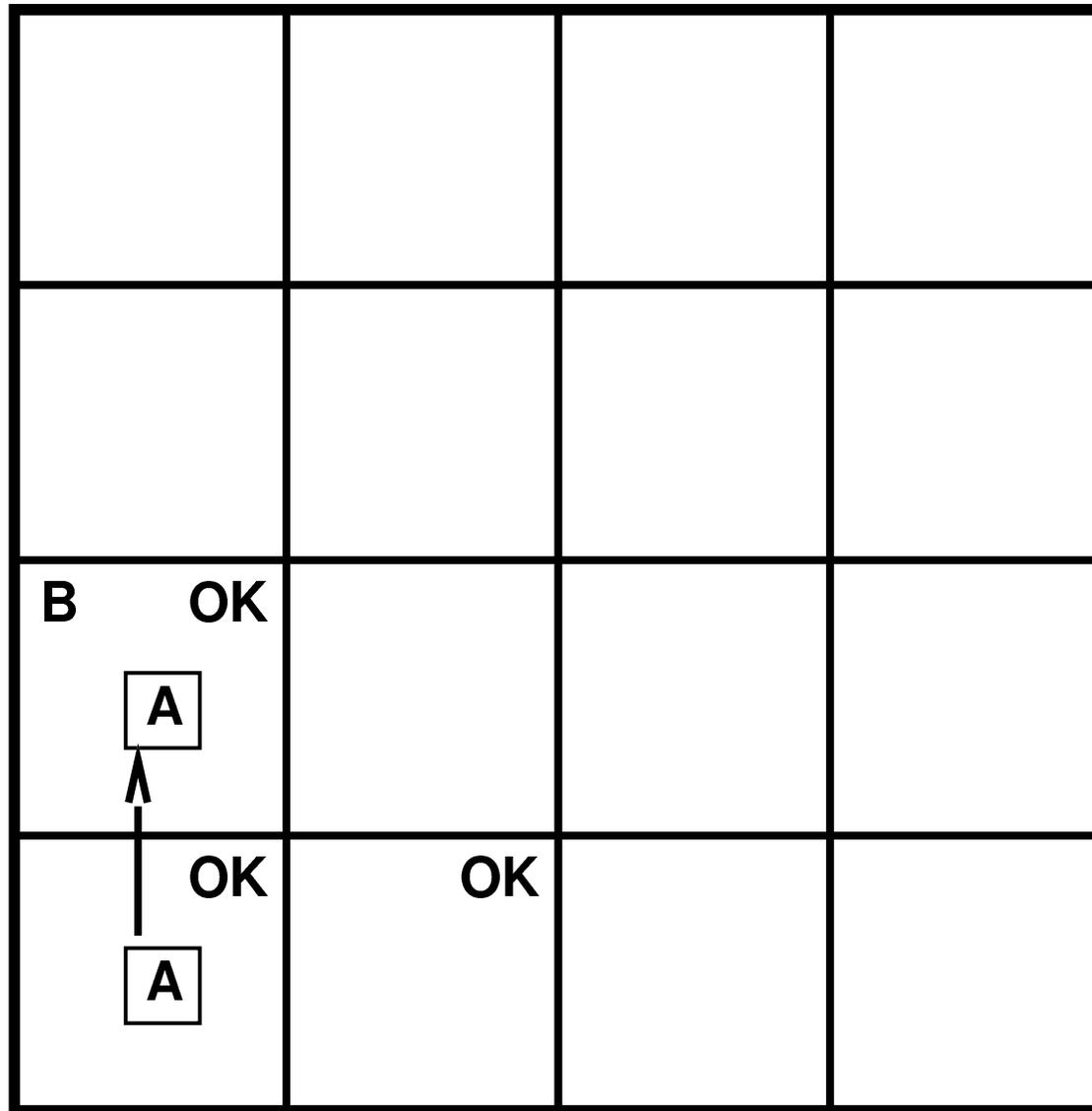
Grab (picks up gold if in same square)



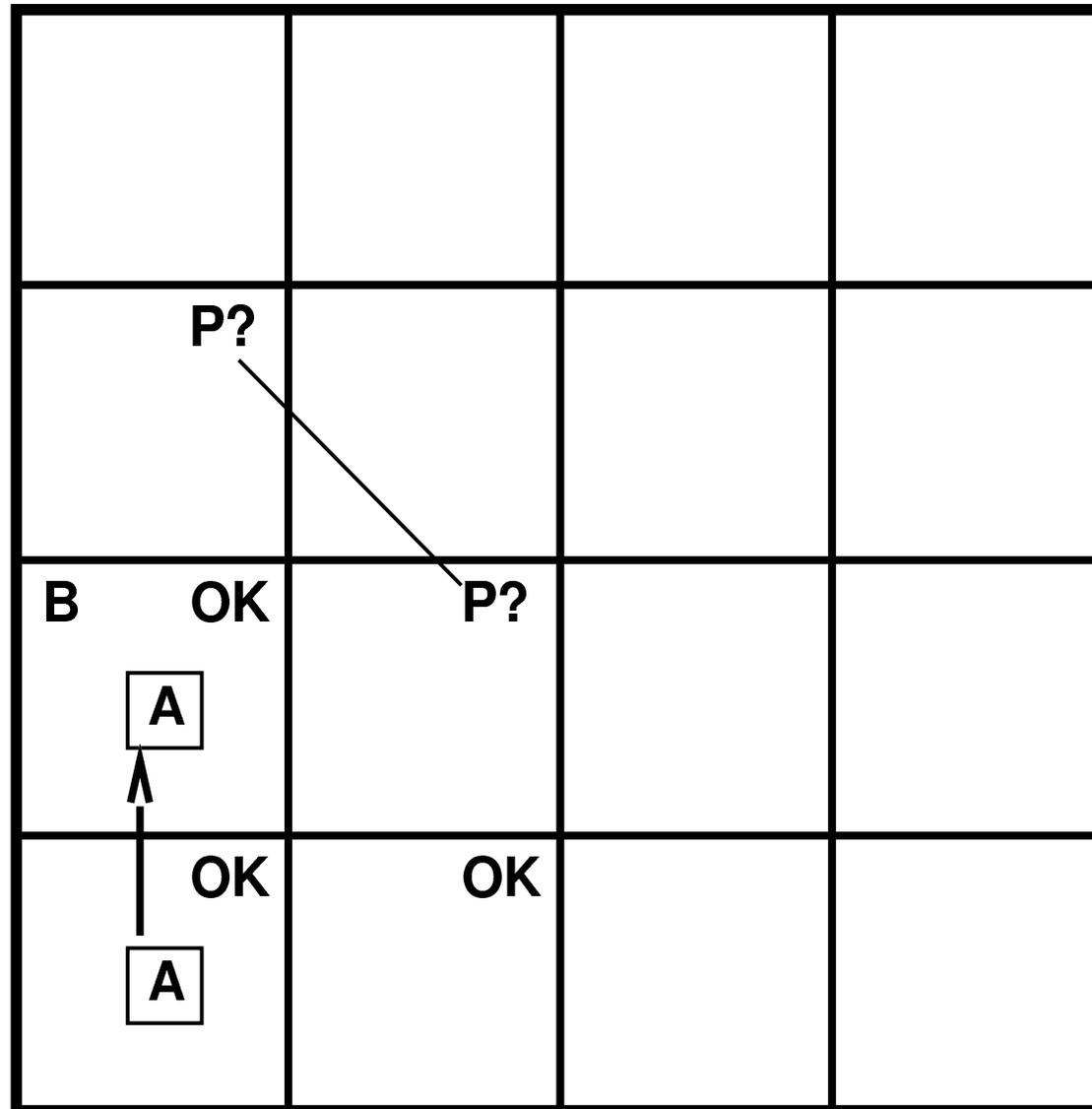
# Exploration der Wumpus-Welt

OK			
OK <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A</span>	OK		

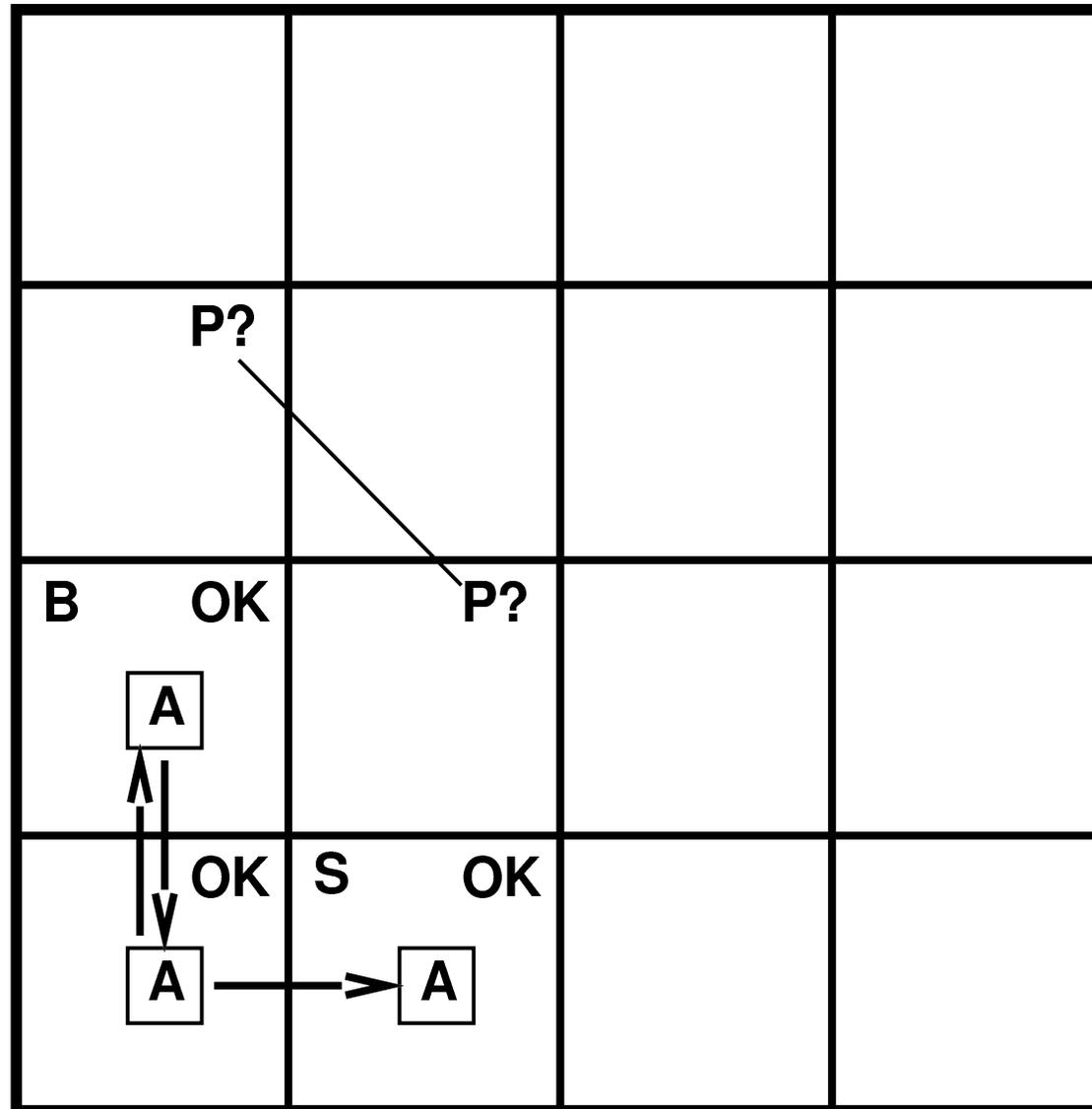
# Exploration der Wumpus-Welt



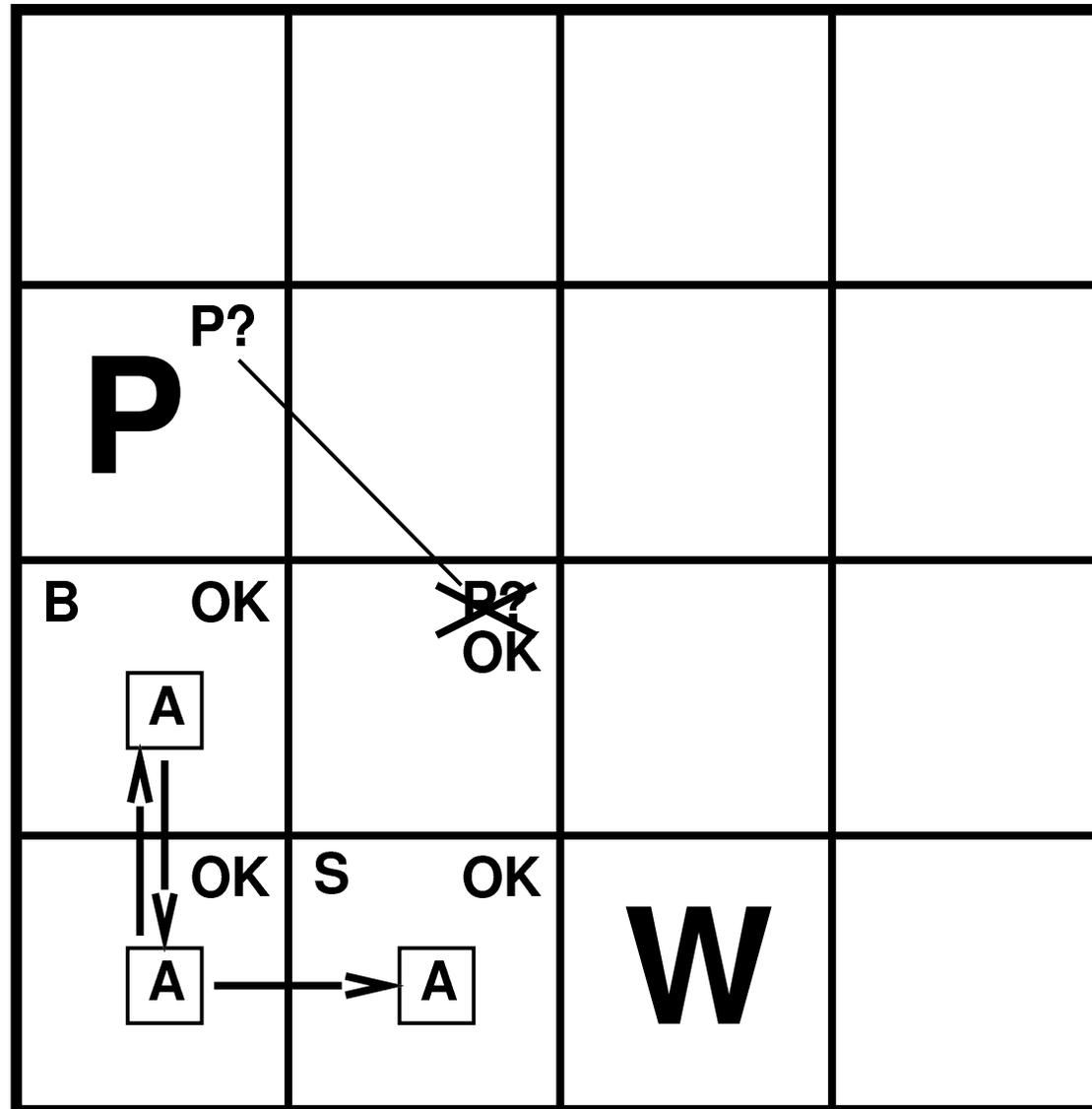
# Exploration der Wumpus-Welt



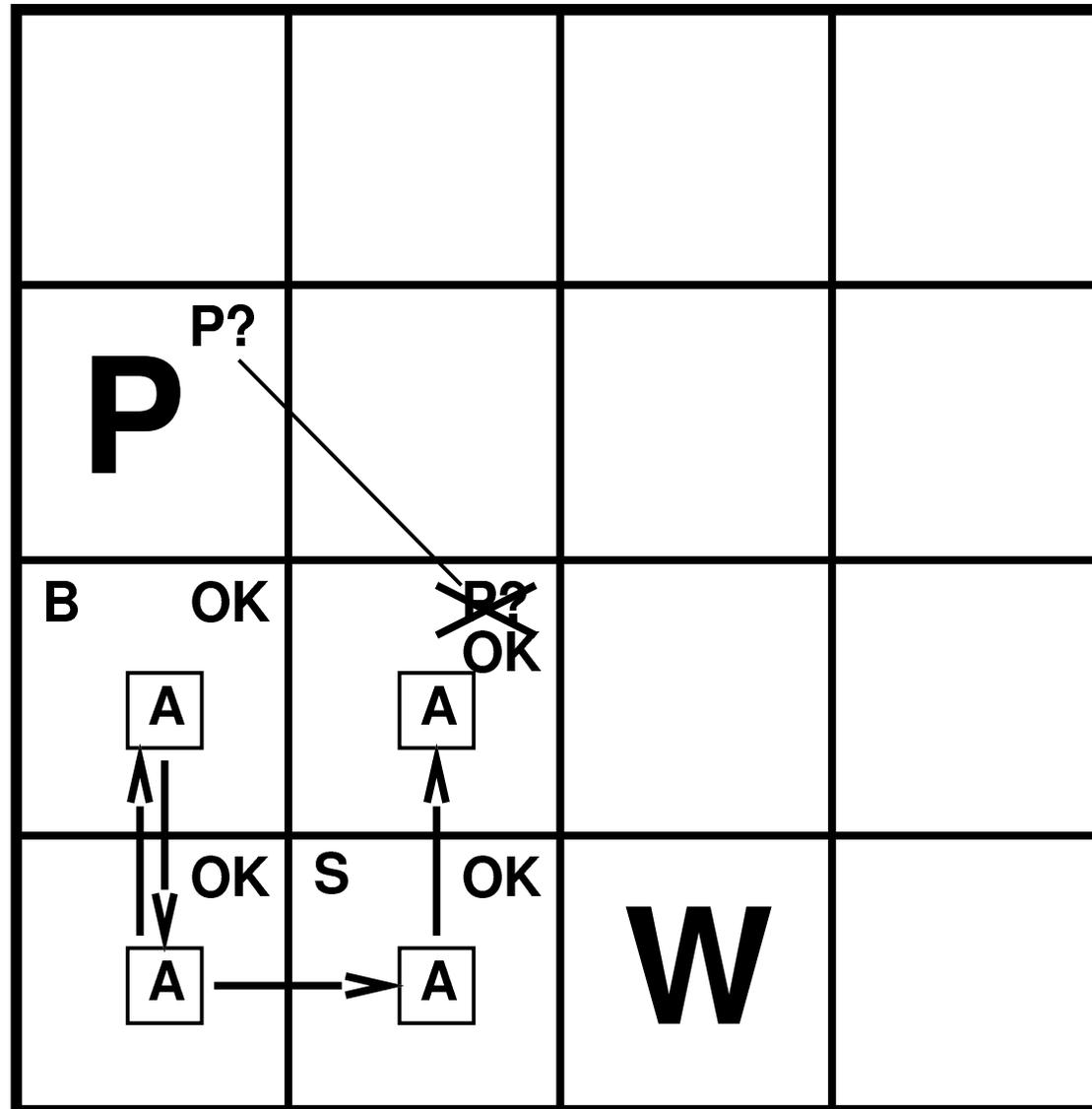
# Exploration der Wumpus-Welt



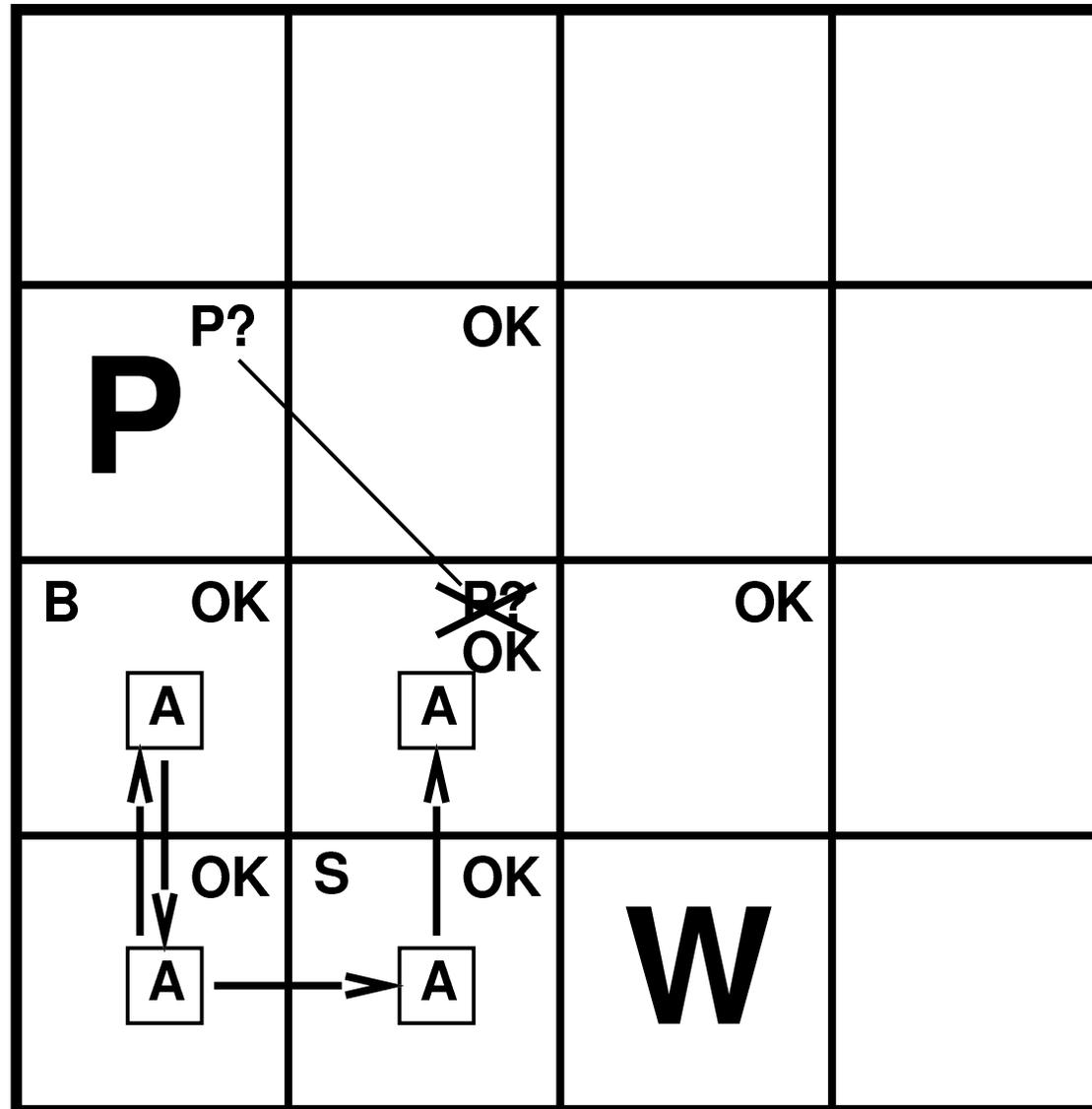
# Exploration der Wumpus-Welt



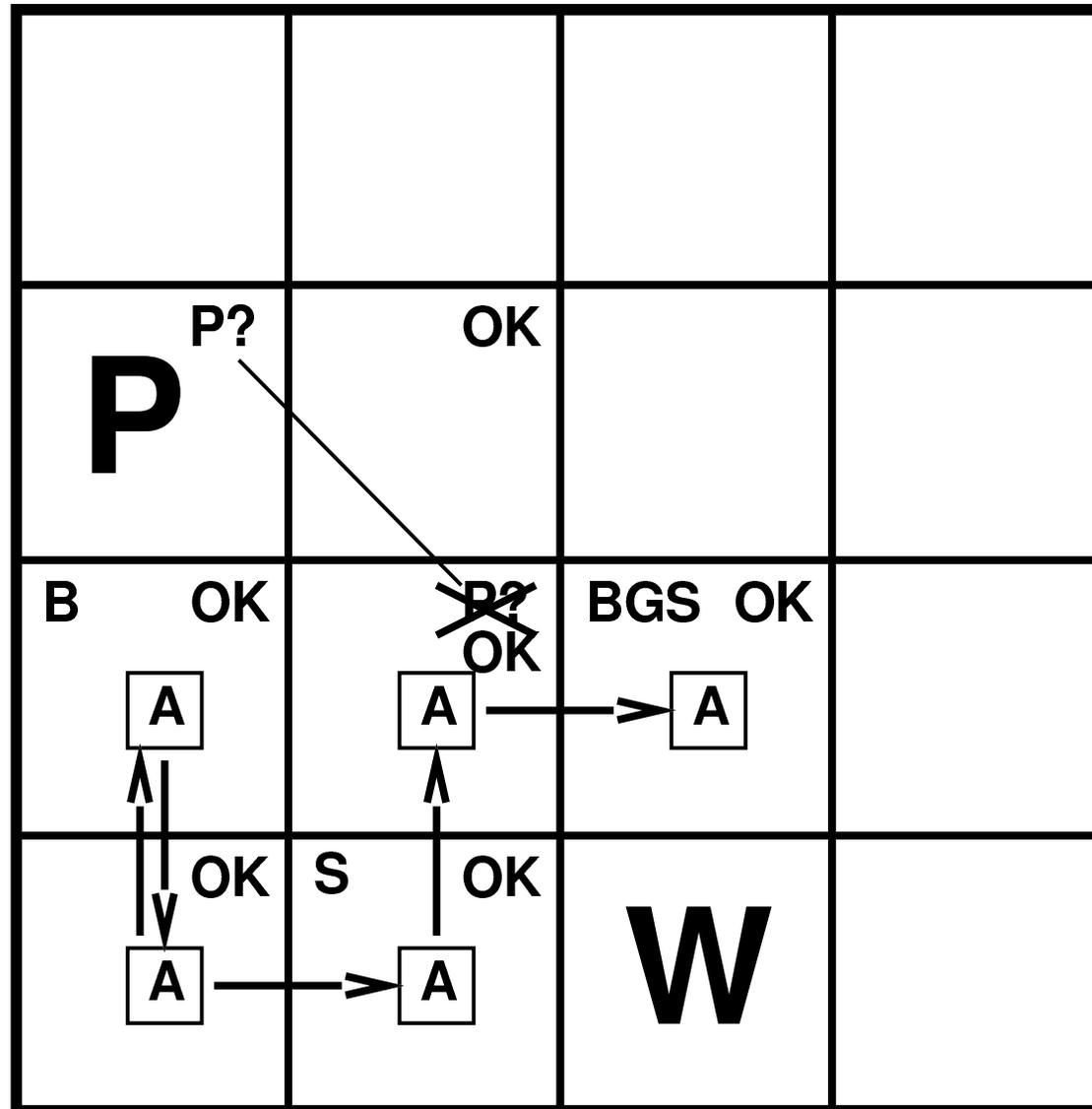
# Exploration der Wumpus-Welt



# Exploration der Wumpus-Welt



# Exploration der Wumpus-Welt

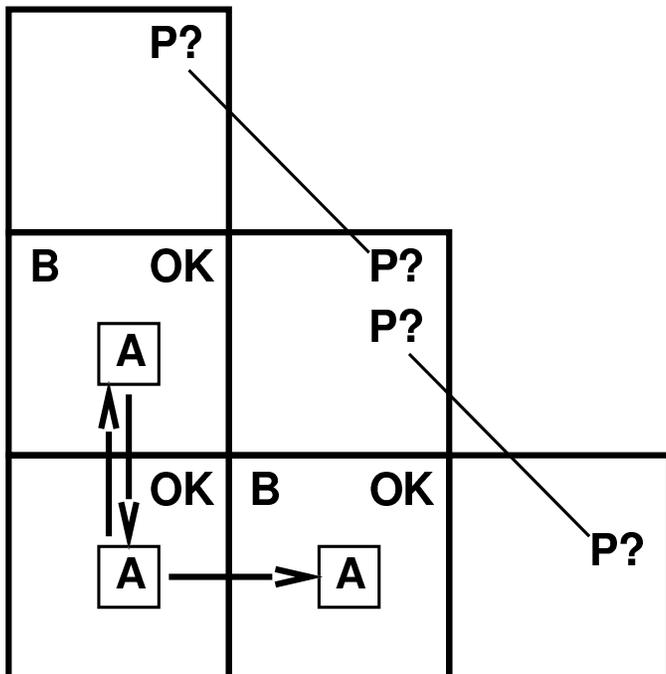


# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Problem

Breeze in (1,2) und (2,1)

⇒ keine sichere Aktion



# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Problem

Breeze in (1,2) und (2,1)

⇒ keine sichere Aktion

## Mögliche Lösung

Annahme:

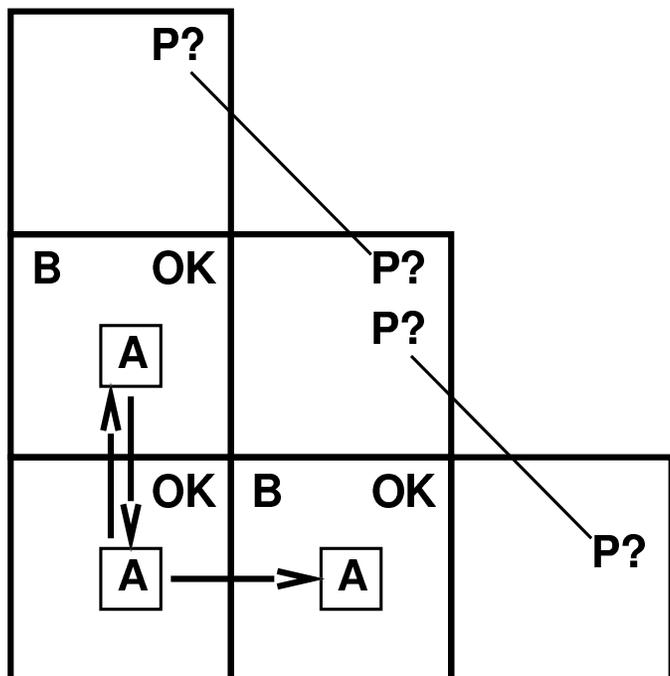
Gruben gleichmäßig verteilt

(2,2) hat Grube:

Wahrscheinlichkeit  $p = 0,86$

(1,3) und (3,1) haben Gruben:

Wahrscheinlichkeit  $p = 0,31$

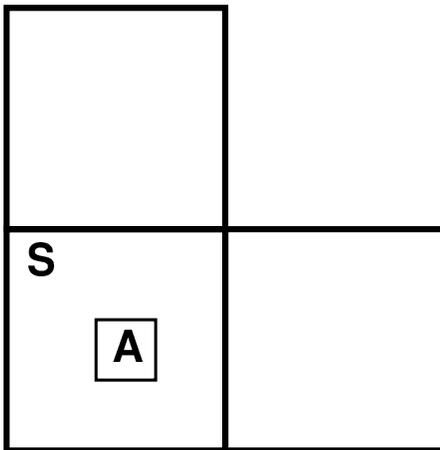


# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Problem

Smell in (1,1)

⇒ keine sichere Aktion

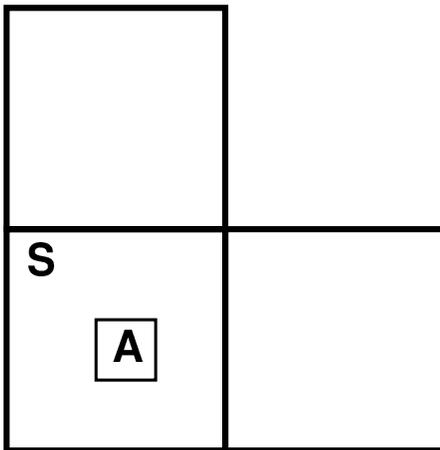


# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Problem

Smell in (1,1)

⇒ keine sichere Aktion



## Mögliche Lösung

Schieße Pfeil

Wumpus war da ⇒ tot ⇒ sicher

wumpus nicht da ⇒ sicher

# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Strategien für problematische Situationen

- Aussagenlogik findet mögliche (sichere) Aktionen
- Problematische Situation, wenn keine der Aktionen sicher ist
- Lösungsstrategien basieren nicht auf Aussagenlogik

# Wumpus-Welt: Problematische Situationen

## Strategien für problematische Situationen

- Aussagenlogik findet mögliche (sichere) Aktionen
- Problematische Situation, wenn keine der Aktionen sicher ist
- Lösungsstrategien basieren nicht auf Aussagenlogik

**Zunächst nicht weiter betrachtet**

# Formale Logik

- ▶ **Syntax**
  - Welche Formeln?
- ▶ **Semantik**
  - Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- ▶ **Deduktionsmechanismus**
  - Ableitung neuer wahrer Formeln

# Formale Logik

- ▶ **Syntax**
  - Welche Formeln?
- ▶ **Semantik**
  - Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- ▶ **Deduktionsmechanismus**
  - Ableitung neuer wahrer Formeln

**Welche Formeln sollen ableitbar sein?**

# Logische Folgerbarkeit

## Definition: Logische Folgerbarkeit

Formel  $A$  folgt logisch aus Formelmenge  $KB$

gdw.

$A$  ist wahr in allen Modellen, in denen  $KB$  wahr ist

# Logische Folgerbarkeit

## Definition: Logische Folgerbarkeit

Formel  $A$  folgt logisch aus Formelmenge  $KB$

gdw.

$A$  ist wahr in allen Modellen, in denen  $KB$  wahr ist

## Notation

$$KB \models \alpha$$

# Logische Folgerbarkeit

## Definition: Logische Folgerbarkeit

Formel  $A$  folgt logisch aus Formelmenge  $KB$

gdw.

$A$  ist wahr in allen Modellen, in denen  $KB$  wahr ist

## Notation

$$KB \models \alpha$$

## Nota bene

Folgerbarkeit ist eine Beziehung zwischen Formeln (**Syntax**),  
die auf **Semantik** basiert

# Logische Folgerbarkeit

## Beispiel

Aus “das Hemd ist grün und gestreift”

folgt logisch

“das Hemd ist grün”

# Logische Folgerbarkeit

## Beispiel

Aus “das Hemd ist grün und gestreift”

folgt logisch

“das Hemd ist grün”

## Beispiel

Aus den Axiomen der Arithmetik und  $x + y = 4$

folgt logisch

$4 = x + y$

# Modelle

## Intuition

**Modelle sind formale Strukturen,  
bzgl. derer die Wahrheit einer Formel ausgewertet werden kann**

# Modelle

## Intuition

**Modelle sind formale Strukturen,  
bzgl. derer die Wahrheit einer Formel ausgewertet werden kann**

## Definition: Modell einer Formel

**$m$  ist Modell einer Formel  $A$ , wenn  $A$  in  $m$  wahr ist**

# Modelle

## Intuition

Modelle sind formale Strukturen,  
bzgl. derer die Wahrheit einer Formel ausgewertet werden kann

## Definition: Modell einer Formel

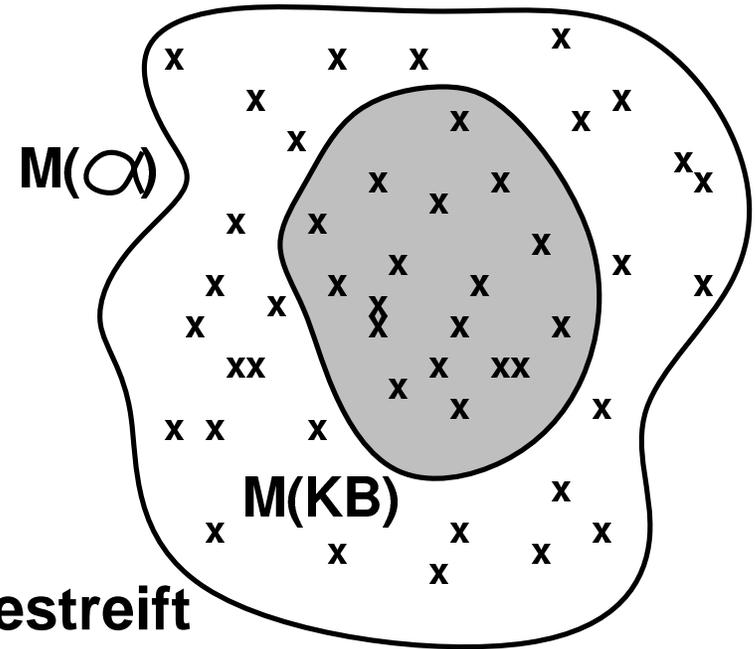
$m$  ist Modell einer Formel  $A$ , wenn  $A$  in  $m$  wahr ist

## Notation

$M(A)$  bezeichnet die Menge aller Modelle von  $A$

Also:  $KB \models \alpha$  gdw.  $M(KB) \subseteq M(\alpha)$

# Modelle: Beispiel



$KB$  = Das Hemd ist grün und gestreift

$\alpha$  = Das Hemd ist grün

# Folgerungen in der Wumpus-Welt

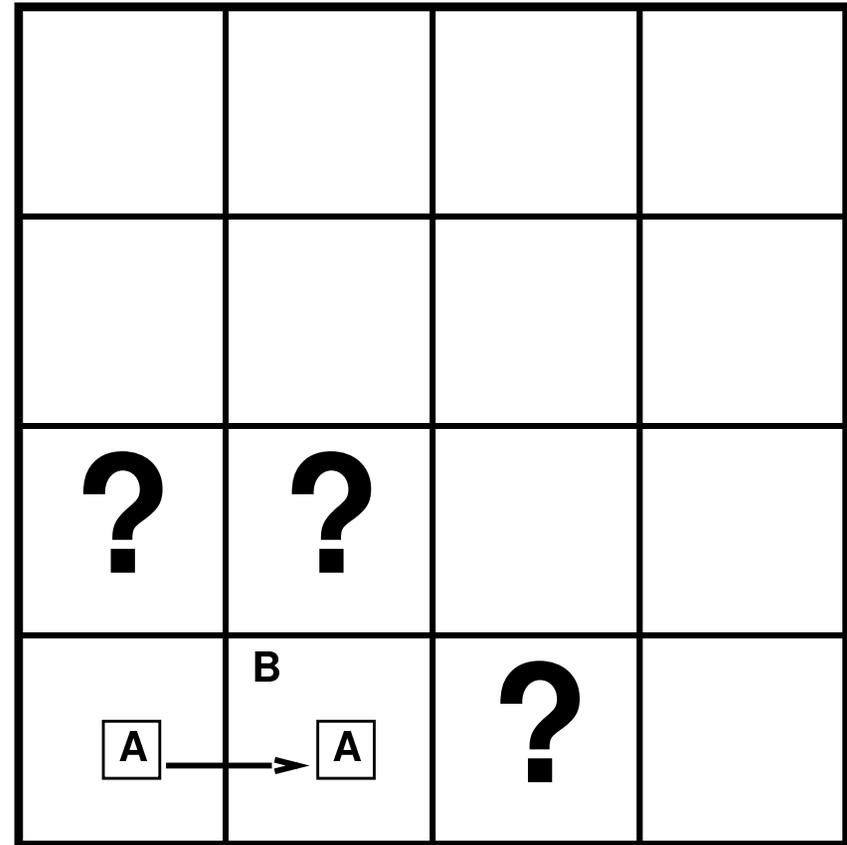
## Situation nach

nichts in [1,1],  
gehe rechts,  
Breeze in [2,1]

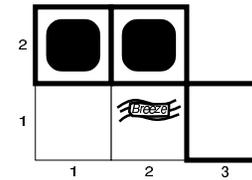
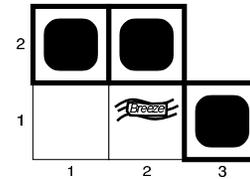
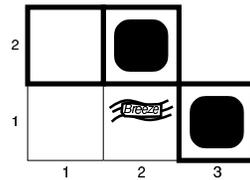
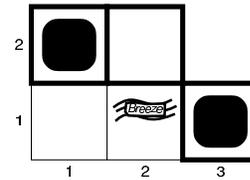
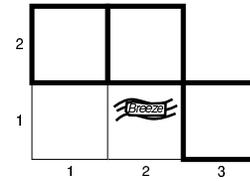
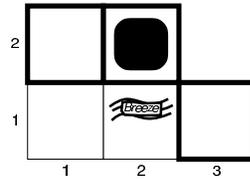
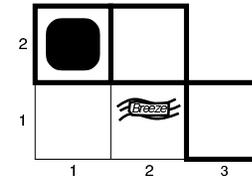
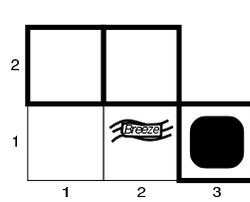
## Mögliche Modelle für “?”

(betrachte nur Gruben)

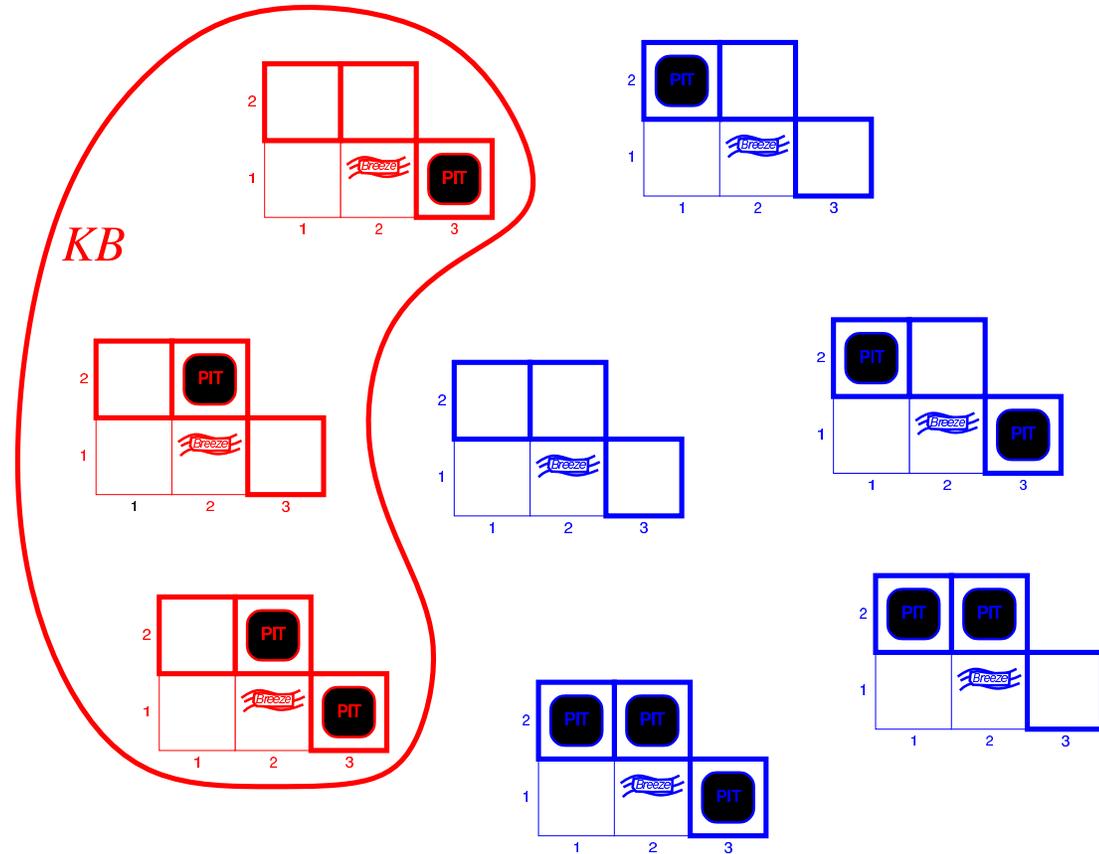
3 boolesche Wahlmöglichkeiten  
8 mögliche Modelle



# Wumpus-Modelle



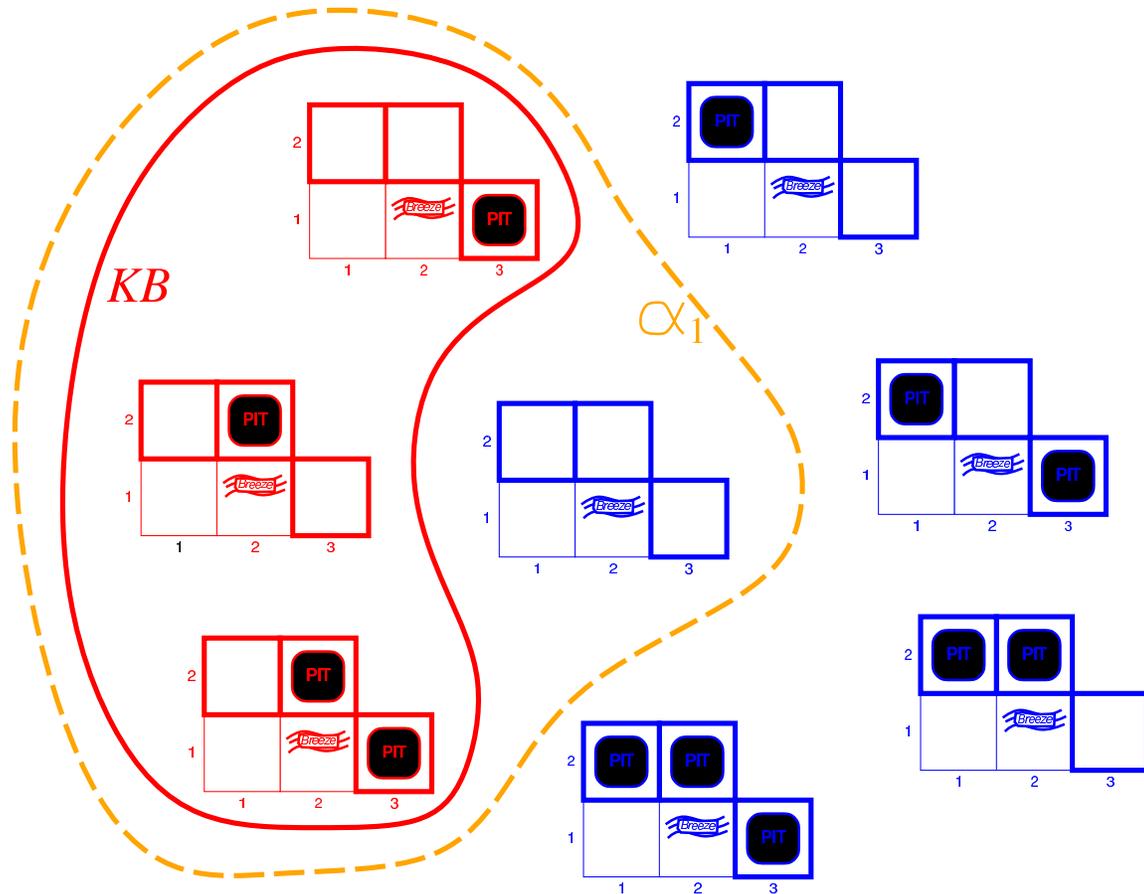
# Wumpus-Modelle



**$KB$  = Regeln der Wumpus-Welt + Beobachtungen**

# Wumpus-Modelle

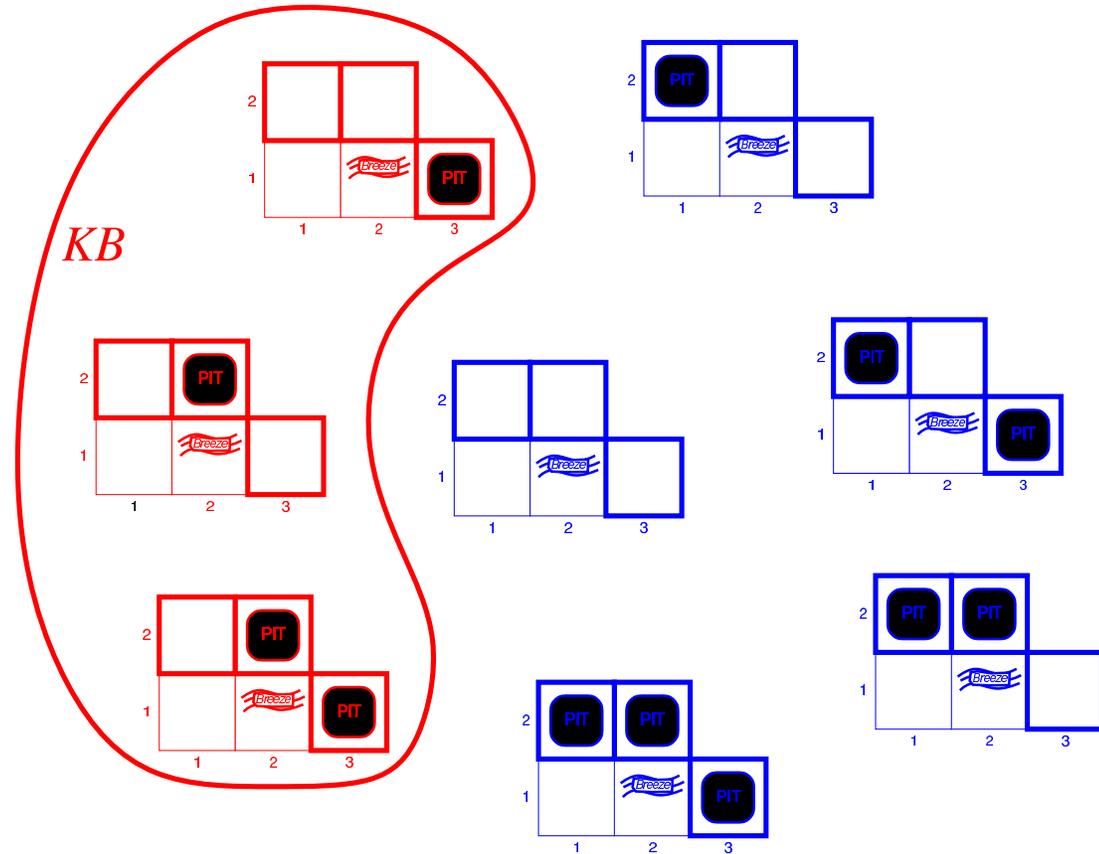
$$KB \models \alpha_1$$



$KB$  = Regeln der Wumpus-Welt + Beobachtungen

$\alpha_1$  = “[1,2] ist sicher”

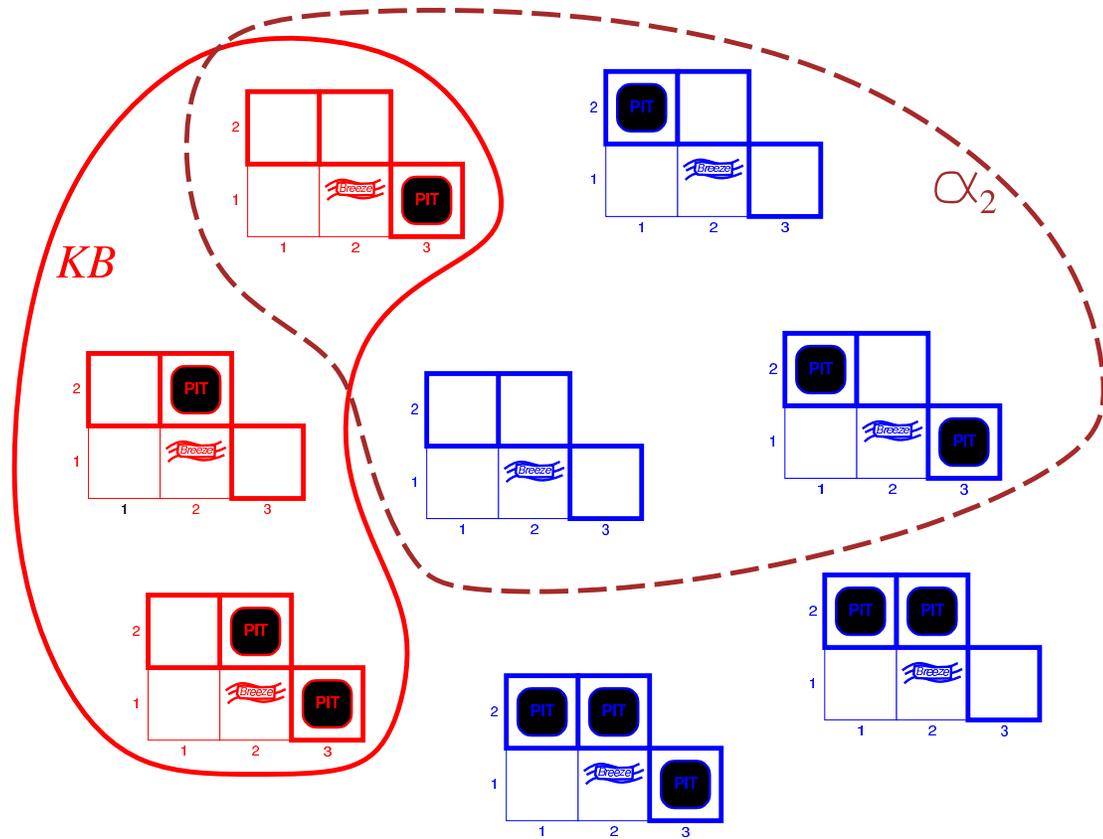
# Wumpus-Modelle



**$KB$  = Regeln der Wumpus-Welt + Beobachtungen**

# Wumpus-Modelle

$$KB \neq \alpha_2$$



$KB$  = Regeln der Wumpus-Welt + Beobachtungen

$\alpha_2$  = “[2,2] ist sicher”

## Notation

$$KB \vdash_i \alpha$$

bedeutet

Formel  $\alpha$  kann aus  $KB$  mit Kalkül  $i$  abgeleitet werden

# Ableitbarkeit

## Notation

$$KB \vdash_i \alpha$$

bedeutet

Formel  $\alpha$  kann aus  $KB$  mit Kalkül  $i$  abgeleitet werden

## Definition: Korrektheit (von $i$ )

Wenn  $KB \vdash_i \alpha$ , dann auch  $KB \models \alpha$

## Definition: Vollständigkeit (von $i$ )

Wenn  $KB \models \alpha$ , dann auch  $KB \vdash_i \alpha$

# Logisches Schließen: Zusammenfassung

- **Beispiel: Wumpus-Welt**

# Logisches Schließen: Zusammenfassung

- **Beispiel: Wumpus-Welt**
- **Logische Folgerbarkeit**

# Logisches Schließen: Zusammenfassung

- **Beispiel: Wumpus-Welt**
- **Logische Folgerbarkeit**
- **Modelle**

# Logisches Schließen: Zusammenfassung

- **Beispiel: Wumpus-Welt**
- **Logische Folgerbarkeit**
- **Modelle**
- **Definition: Korrektheit und Vollständigkeit**