Vorlesung

Logik für Informatiker

3. Aussagenlogik

– Syntax und Semantik der Aussagenlogik –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

$\neg$ Negationssymbol („nicht“)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

- 1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\longrightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- $\longleftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

- 1 **Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**
- 0 **Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**
- $\neg$ **Negationssymbol („nicht“)**
- $\wedge$ **Konjunktionssymbol („und“)**
- $\vee$ **Disjunktionssymbol („oder“)**
- $\longrightarrow$ **Implikationssymbol („wenn . . . dann“)**
- $\longleftrightarrow$ **Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)**
- $(\ )$ **die beiden Klammern**

Vokabular der Aussagenlogik: Signatur

Definition: Aussagenlogische Signatur

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Vokabular der Aussagenlogik: Signatur

Definition: Aussagenlogische Signatur

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Σ

- **atomare Aussagen**
- **Atome**
- **Aussagevariablen**

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- **1** $\in For0_\Sigma$ **und** **0** $\in For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- **1** $\in For0_\Sigma$ **und** **0** $\in For0_\Sigma$
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- **$1 \in For0_\Sigma$ und $0 \in For0_\Sigma$**
- **$\Sigma \subseteq For0_\Sigma$**
- **Wenn $A, B \in For0_\Sigma$, dann auch**

  $\neg A, \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \rightarrow B), \quad (A \leftrightarrow B)$

  Elemente von $For0_\Sigma$

Beispiel: Formeln aus der Wumpus-Welt

Aussagenlogische Variablen

$P_{i,j}$ **bedeutet:** **“Grube in** $[i, j]$**”**
$B_{i,j}$ **bedeutet:** **“Luftzug in** $[i, j]$**”**

$$\neg P_{1,1} \qquad \neg B_{1,1} \qquad B_{2,1}$$

Beispiel: Formeln aus der Wumpus-Welt

Aussagenlogische Variablen

$P_{i,j}$ **bedeutet: "Grube in $[i, j]$"**
$B_{i,j}$ **bedeutet: "Luftzug in $[i, j]$"**

$$\neg P_{1,1} \qquad \neg B_{1,1} \qquad B_{2,1}$$

Formeln

"Gruben bewirken Luftzug in angrenzenden Feldern"

$$P_{1,2} \longrightarrow (B_{1,1} \wedge B_{1,3} \wedge B_{2,2})$$

"Luftzug in einem Feld gdw. es an eine Grube grenzt"

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$
$$B_{2,1} \leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$$

Induktion über Formelaufbau: Beispiel

Lemma

Ist $A \in For0_\Sigma$ und sind B, C Teilformeln von A, dann gilt

- C ist Teilformel von B, oder
- B ist Teilformel von C, oder
- B, C liegen getrennt

Beweis: Durch noethersche Induktion über den Formelaufbau

Semantik der Aussagenlogik

Σ eine aussagenlogische Signatur

Definition: Aussagenlogisches Modell (Interpretation)

Eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \longrightarrow \{true, \; false\}$$

Semantik der Aussagenlogik

Σ **eine aussagenlogische Signatur**

Definition: Aussagenlogisches Modell (Interpretation)

Eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \longrightarrow \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$$

Beispiel

A	B	C
true	true	false

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

Semantik der Aussagenlogik

Definition: Auswertung von Formeln in einem Modell

Zu Modell / Interpretation I

$$val_I : For0_\Sigma \longrightarrow \{true, false\}$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(\mathbf{1}) &= true \\ val_I(\mathbf{0}) &= false \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \textbf{für } P \in \Sigma \end{aligned}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} false & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \\ true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = false \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(A \wedge B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \textbf{ und } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(A \vee B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \textbf{ oder } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(A \rightarrow B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = false \textbf{ oder } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(A \leftrightarrow B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = val_I(B) \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$