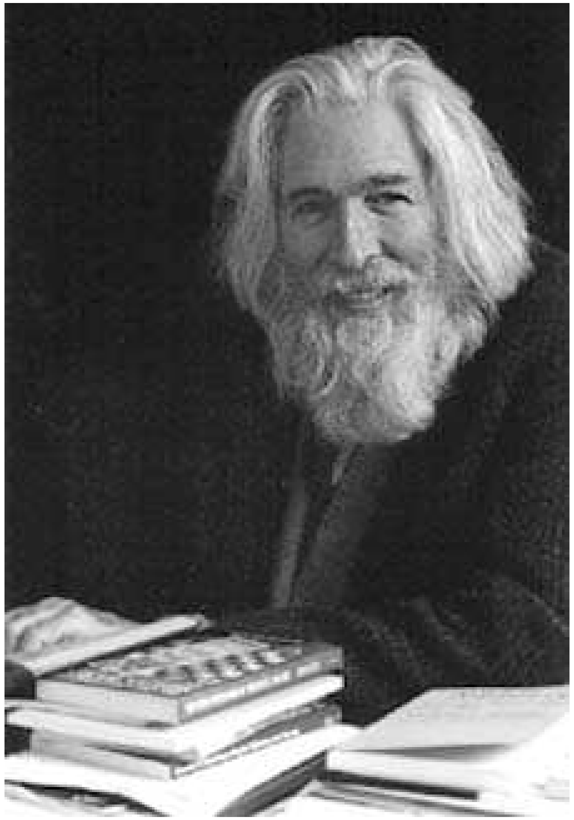
Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
$false$	$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$true$
$false$	$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$false$
$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$

Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

Disjunktive Formeln: Typ β



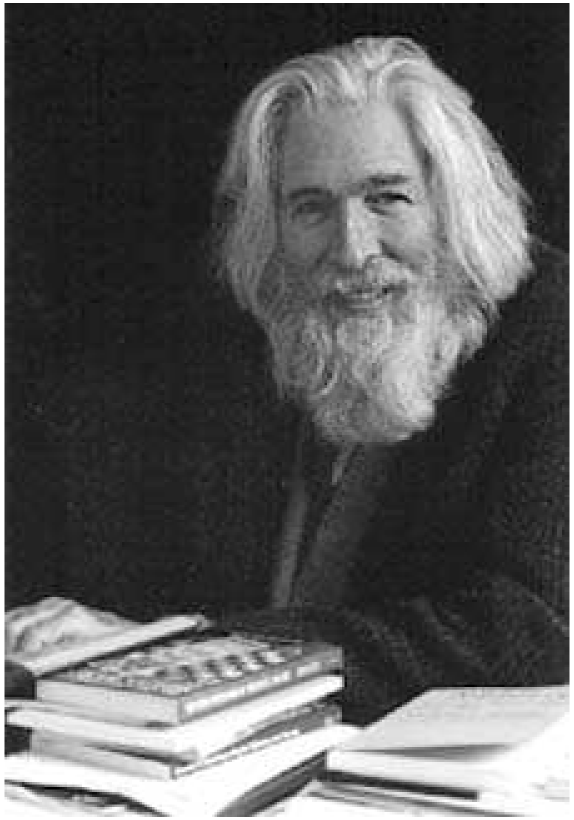
Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \rightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β



Raymond Smullyan

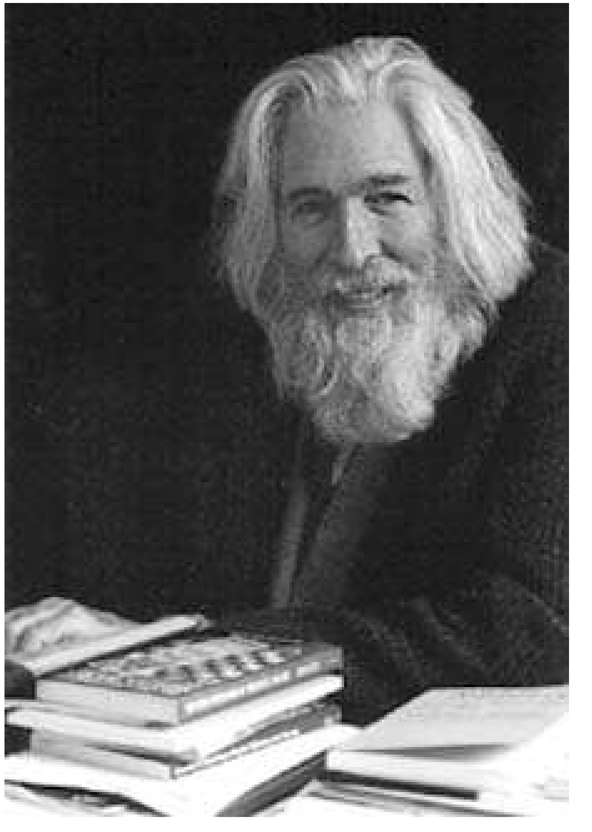
Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \land B$
- $\neg(A \lor B)$
- $\neg(A \longrightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(A \land B)$
- $A \lor B$
- $A \longrightarrow B$



Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

β	β_1	β_2
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \vee B$	A	B
$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

Uniforme Notation: Beispiel der Anwendung

Alternative Art der Definition von val_I

$$val_I(\alpha) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(\alpha_1) = true \textbf{ und } val_I(\alpha_2) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(\beta) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(\beta_1) = true \textbf{ oder } val_I(\beta_2) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Uniforme Notation: Beispiel der Anwendung

Alternative Art der Definition von val_I

$$val_I(\alpha) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\alpha_1) = true \text{ und } val_I(\alpha_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(\beta) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\beta_1) = true \text{ oder } val_I(\beta_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

Umfaßt Definition von val_I für alle Operatoren außer: 1, 0, $\neg$, $\leftrightarrow$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Modell einer Formel

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formel $A \in For0_{\Sigma}$, falls

$$val_I(A) = true$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Modell einer Formel

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formel $A \in For0_{\Sigma}$, falls

$$val_I(A) = true$$

Definition: Modell einer Formelmenge

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For0_{\Sigma}$, falls

$$val_I(A) = true \qquad \text{für alle } A \in M$$

Zur Erinnerung: Logische Folgerbarkeit

Definition: Logische Folgerbarkeit

Formel A folgt logisch aus Formelmenge KB

gdw.

alle Modelle von KB sind auch Modell von A

Notation

$$KB \models \alpha$$

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
false	*false*	*false*				
false	*false*	*true*				
false	*true*	*false*				
false	*true*	*true*				
true	*false*	*false*				
true	*false*	*true*				
true	*true*	*false*				
true	*true*	*true*				

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$			
$false$	$false$	$true$	$true$			
$false$	$true$	$false$	$false$			
$false$	$true$	$true$	$true$			
$true$	$false$	$false$	$true$			
$true$	$false$	$true$	$true$			
$true$	$true$	$false$	$true$			
$true$	$true$	$true$	$true$			

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha \;=\; A \vee B \qquad KB \;=\; (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$		
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$		
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$		
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$		
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$		
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$		
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$		
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$		

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \lor B \qquad KB = (A \lor C) \land (B \lor \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \lor C$	$B \lor \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha \;=\; A \lor B \qquad KB \;=\; (A \lor C) \land (B \lor \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \lor C$	$B \lor \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Notation

$$\alpha \equiv \beta$$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Notation

$$\alpha \equiv \beta$$

Beispiel

$$(A \rightarrow B) \quad \equiv \quad (\neg B \rightarrow \neg A) \qquad \textbf{(Kontraposition)}$$

Logische Äquivalenz

Substitutionstheorem

Wenn

- $A \equiv B$
- C' **ist das Ergebnis der Ersetzung einer Unterformel** A **in** C **durch** B**,**

dann

$$C \equiv C'$$

Logische Äquivalenz

Substitutionstheorem

Wenn

- $A \equiv B$
- C' **ist das Ergebnis der Ersetzung einer Unterformel** A **in** C **durch** B**,**

dann

$$C \equiv C'$$

Beispiel

$$A \vee B \quad \equiv \quad B \vee A$$

impliziert

$$(C \wedge (A \vee B)) \longrightarrow D \quad \equiv \quad (C \wedge (B \vee A)) \longrightarrow D$$

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \land B) \equiv (B \land A)$ **Kommutativität von $\land$**
- $(A \lor B) \equiv (B \lor A)$ **Kommutativität von $\lor$**
- $((A \land B) \land C) \equiv (A \land (B \land C))$ **Assoziativität von $\land$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**
- $\neg\neg A \equiv A$ **Doppelnegation**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**
- $\neg\neg A \equiv A$ **Doppelnegation**
- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg B \longrightarrow \neg A)$ **Kontraposition**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \;\equiv\; (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \;\equiv\; ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \;\equiv\; (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \;\equiv\; (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \;\equiv\; ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \;\equiv\; (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \;\equiv\; (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $(A \wedge (B \vee C)) \;\equiv\; ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ **Distributivität von $\wedge$ über $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ **Distributivität von $\wedge$ über $\vee$**
- $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ **Distributivität von $\vee$ über $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen (zusammengefasst)

$(A \wedge B)$	$\equiv$	$(B \wedge A)$	**Kommutativität von $\wedge$**
$(A \vee B)$	$\equiv$	$(B \vee A)$	**Kommutativität von $\vee$**
$((A \wedge B) \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge (B \wedge C))$	**Assoziativität von $\wedge$**
$((A \vee B) \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee (B \vee C))$	**Assoziativität von $\vee$**
$(A \wedge A)$	$\equiv$	A	**Idempotenz für $\wedge$**
$(A \vee A)$	$\equiv$	A	**Idempotenz für $\vee$**
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	**Doppelnegation**
$(A \longrightarrow B)$	$\equiv$	$(\neg B \longrightarrow \neg A)$	**Kontraposition**
$(A \longrightarrow B)$	$\equiv$	$(\neg A \vee B)$	**Elimination Implikation**
$(A \leftrightarrow B)$	$\equiv$	$((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$	**Elimination Äquivalenz**
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$(\neg A \vee \neg B)$	**de Morgans Regeln**
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$(\neg A \wedge \neg B)$	**de Morgans Regeln**
$(A \wedge (B \vee C))$	$\equiv$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	**Distributivität von $\wedge$ über $\vee$**
$(A \vee (B \wedge C))$	$\equiv$	$((A \vee B) \wedge (A \vee C))$	**Distributivität von $\vee$ über $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \;\equiv\; \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \;\equiv\; \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \wedge \mathbf{1}) \;\equiv\; A$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \wedge \mathbf{1}) \equiv A$
- $(A \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \wedge \mathbf{1}) \equiv A$
- $(A \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn A, B logisch äquivalent sind, kann A in B umgeformt werden

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Notation

$$\models A$$

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Notation

$$\models A$$

Beispiele

- $A \vee \neg A$
- $A \longrightarrow A$
- $(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B$
- **1**

Deduktionstheorem

Deduktionstheorem

$$KB \models A \qquad \textbf{gdw.} \qquad KB \rightarrow A \quad \textbf{ist allgemeingültig}$$

(verbindet logische Folgerbarkeit und Allgemeingültigkeit)

Deduktionstheorem

Deduktionstheorem

$$KB \models A \qquad \text{gdw.} \qquad KB \rightarrow A \quad \text{ist allgemeingültig}$$

(verbindet logische Folgerbarkeit und Allgemeingültigkeit)

Folgerungen

- $M \cup \{A\} \models B$ **gdw.** $M \models A \rightarrow B$
- A, B **sind logisch äquivalent gdw.** $A \leftrightarrow B$ **ist allgemeingültig**

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeit

Eine Formel ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeit

Eine Formel ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat

Beispiele

- $A \vee B$
- A
- $A \wedge (A \longrightarrow B)$

Unerfüllbarkeit

Definition: Unerfüllbarkeit

Eine Formel ist unerfüllbar, wenn sie in *keinem* Modell wahr ist, d.h., nicht erfüllbar ist

Unerfüllbarkeit

Definition: Unerfüllbarkeit

Eine Formel ist unerfüllbar, wenn sie in *keinem* Modell wahr ist, d.h., nicht erfüllbar ist

Beispiel

- $A \land \neg A$

Allgemeingültigkeit / Ableitbarkeit / Unerfüllbarkeit

Theorem

A **ist allgemeingültig** **gdw.** $\neg A$ **ist unerfüllbar**

(verbindet Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit)

Allgemeingültigkeit / Ableitbarkeit / Unerfüllbarkeit

Theorem

A **ist allgemeingültig gdw.** $\neg A$ **ist unerfüllbar**

(verbindet Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit)

Theorem

$KB \models A$ **gdw.** $(KB \land \neg A)$ **ist unerfüllbar**

(verbindet logische Ableitbarkeit und Unerfüllbarkeit)

Verbindung der Eigenschaften

Aus den Theoremen folgt

- Logische Folgerbarkeit
- Allgemeingültigkeit
- Unerfüllbarkeit

sind verbunden.

Kalkül für eine dieser Eigenschaften genügt