Vorlesung

Logik für Informatiker

5. Aussagenlogik

– Normalformen –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Normalformen

Definition: Literal

- **Atom (aussagenlogische Variable) oder**
- **die Negation eines Atoms**

Normalformen

Definition: Literal

- **Atom (aussagenlogische Variable) oder**
- **die Negation eines Atoms**

Definition: Klausel

Eine Disjunktion von Literalen

- **mehrstellige Disjunktionen** $(A \vee \neg B \vee C)$
- **einstellige Disjunktionen** A
- **die nullstellige Disjunktion (leere Klausel)** **0**

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele

- $(A \vee \neg B) \;\wedge\; (B \vee \neg C \vee \neg D)$
- $A \vee B$
- $A \wedge (B \vee C)$
- $A \wedge B$
- **1**

Disjunktive Normalform

Definition: Disjunktive Normalform (DNF)

Eine Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele

- $(A \land \neg B) \lor (B \land \neg C \land \neg D)$
- $A \land B$
- $A \lor (B \land C)$
- $A \lor B$
- **0**

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  – eine äquivalente Formel in KNF
  – eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
  - Disjunktionen in der KNF entsprechen den Zeilen mit $true$
  - Konjunktionen in der DNF entsprechen den Zeilen mit $false$

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- **Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es**
  – eine äquivalente Formel in KNF
  – eine äquivalente Formel in DNF
- **Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig**
- **Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden**
  – Disjunktionen in der KNF entsprechen den Zeilen mit $true$
  – Konjunktionen in der DNF entsprechen den Zeilen mit $false$
- **Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden**

Umformung in KNF

Vier Schritte

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $\quad A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $$A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

2. **Elimination von $\rightarrow$**

   Verwende $$A \rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B$$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $\quad A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. **Elimination von $\rightarrow$**

   Verwende $\quad A \rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B$

3. **„Nach innen schieben“ von $\neg$**

   Verwende $\quad$ **de Morgans Regeln und** $\neg\neg A \quad \equiv \quad A$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $\quad A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

2. **Elimination von $\rightarrow$**

   Verwende $\quad A \rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \lor B$

3. **„Nach innen schieben“ von $\neg$**

   Verwende **de Morgans Regeln und** $\neg\neg A \quad \equiv \quad A$

4. **„Nach innen schieben“ von $\lor$**

   Verwende **Distributivität von $\lor$ über $\land$**

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \;\land\; ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\longleftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \;\wedge\; ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\longleftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \;\wedge\; ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

3. Nach innen schieben von $\neg$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \;\wedge\; ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

3. Nach innen schieben von $\neg$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

4. Nach innen schieben von $\vee$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \;\wedge\; (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n \quad = \quad (P_{1,1} \land P_{1,2}) \lor \ldots \lor (P_{n,1} \land P_{n,2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2\}\}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n \quad = \quad (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2\}\}$$

Größe der KNF

- **Literale in A_n:** $2 * n$
- **Literale in KNF von A_n:** $n * 2^n$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge\{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}\}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge\{P_{1,f(1)} \lor \ldots \lor P_{n,f(n)} \mid f : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2\}\}$$

Für $n = 3$

$$\begin{array}{lclc}
(P_{1,1} \lor P_{2,1} \lor P_{3,1}) & \land & (P_{1,1} \lor P_{2,1} \lor P_{3,2}) & \land \\
(P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}) & \land & (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,2}) & \land \\
(P_{1,2} \lor P_{2,1} \lor P_{3,1}) & \land & (P_{1,2} \lor P_{2,1} \lor P_{3,2}) & \land \\
(P_{1,2} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}) & \land & (P_{1,2} \lor P_{2,1} \lor P_{3,2}) &
\end{array}$$

KNF: Mengenschreibweise

Notation

- **Klausel als Menge von Literalen**
- **Formel in KNF als Menge von Klauseln**

KNF: Mengenschreibweise

Notation

- **Klausel als Menge von Literalen**
- **Formel in KNF als Menge von Klauseln**

Beispiel

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1} \;\wedge\; (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$$

als

$$\{\ \{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1})\},\ \{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\},\ \{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}\ \}$$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  =

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

- **Leere Menge von Klauseln**

  = leere Konkunktion

  =

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

- **Leere Menge von Klauseln**

  = leere Konkunktion

  = 1

Vereinfachung der KNF: Subsumtion

Theorem

Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subsetneq K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: **Eine aussagenlogische Formel** F

Frage: **Ist** F **erfüllbar?**

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: **Eine aussagenlogische Formel F**

Frage: **Ist F erfüllbar?**

Theorem (ohne Beweis)

SAT ist ein NP-vollständiges Problem

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**
- **Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden**

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**
- **Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden**
- **Wenn es stimmt, dass $NP \neq P$, dann ist SAT nicht in polynomieller Zeit entscheidbar**

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- **KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)**

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- **KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)**
- **3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)**
- **2-KNF ist polynomiell entscheidbar (Beweisidee an Tafel)**

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)
- 2-KNF ist polynomiell entscheidbar (Beweisidee an Tafel)
- DNF ist polynomiell entscheidbar (Beweis einfach)

Horn-Formeln

Defintion: Horn-Formel

- **Formel in KNF,**
- **in der jede Klausel höchstens ein positives Literale enthält**

Horn-Formeln

Defintion: Horn-Formel

- Formel in KNF,
- in der jede Klausel höchstens ein positives Literale enthält

Notation: Als Implikation

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \quad \longrightarrow \quad A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \quad \longrightarrow$
A	$\longrightarrow \quad A$

Horn-Formeln

Defintion: Horn-Formel

- **Formel in KNF,**
- **in der jede Klausel höchstens ein positives Literale enthält**

Notation: Als Implikation

$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \quad \longrightarrow \quad A$
$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \quad \longrightarrow$
A	$\longrightarrow \quad A$

$B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$: **„Rumpf“**

A: **„Kopf“**

Horn-Formel: Beispiel

Notation als Literalmengen

$$\{ \neg P \}$$

$$\{ Q, \neg R, \neg S \}$$

$$\{ \neg Q \vee \neg S \}$$

$$\{ R \}$$

$$\{ S \}$$

$$\{ \neg Q \vee P \}$$

Horn-Formel: Beispiel

Notation als Literalmengen	Notation als Implikationen
$\{\neg P\}$	$P \rightarrow$
$\{Q, \neg R, \neg S\}$	$R \wedge S \rightarrow Q$
$\{\neg Q \vee \neg S\}$	$Q \wedge S \rightarrow$
$\{R\}$	$\rightarrow R$
$\{S\}$	$\rightarrow S$
$\{\neg Q \vee P\}$	$Q \rightarrow P$

Horn-Formel: Beispiel

Notation als Literalmengen	Notation als Implikationen
$\{\ \neg P\ \}$	$P \longrightarrow$
$\{\ Q, \neg R, \neg S\ \}$	$R, S \longrightarrow Q$
$\{\ \neg Q \vee \neg S\ \}$	$Q, S \longrightarrow$
$\{\ R\ \}$	$\longrightarrow R$
$\{\ S\ \}$	$\longrightarrow S$
$\{\ \neg Q \vee P\ \}$	$Q \longrightarrow P$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $C = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ **eine Hornformel**

Ein Atom in C zu markieren, bedeutet,
es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

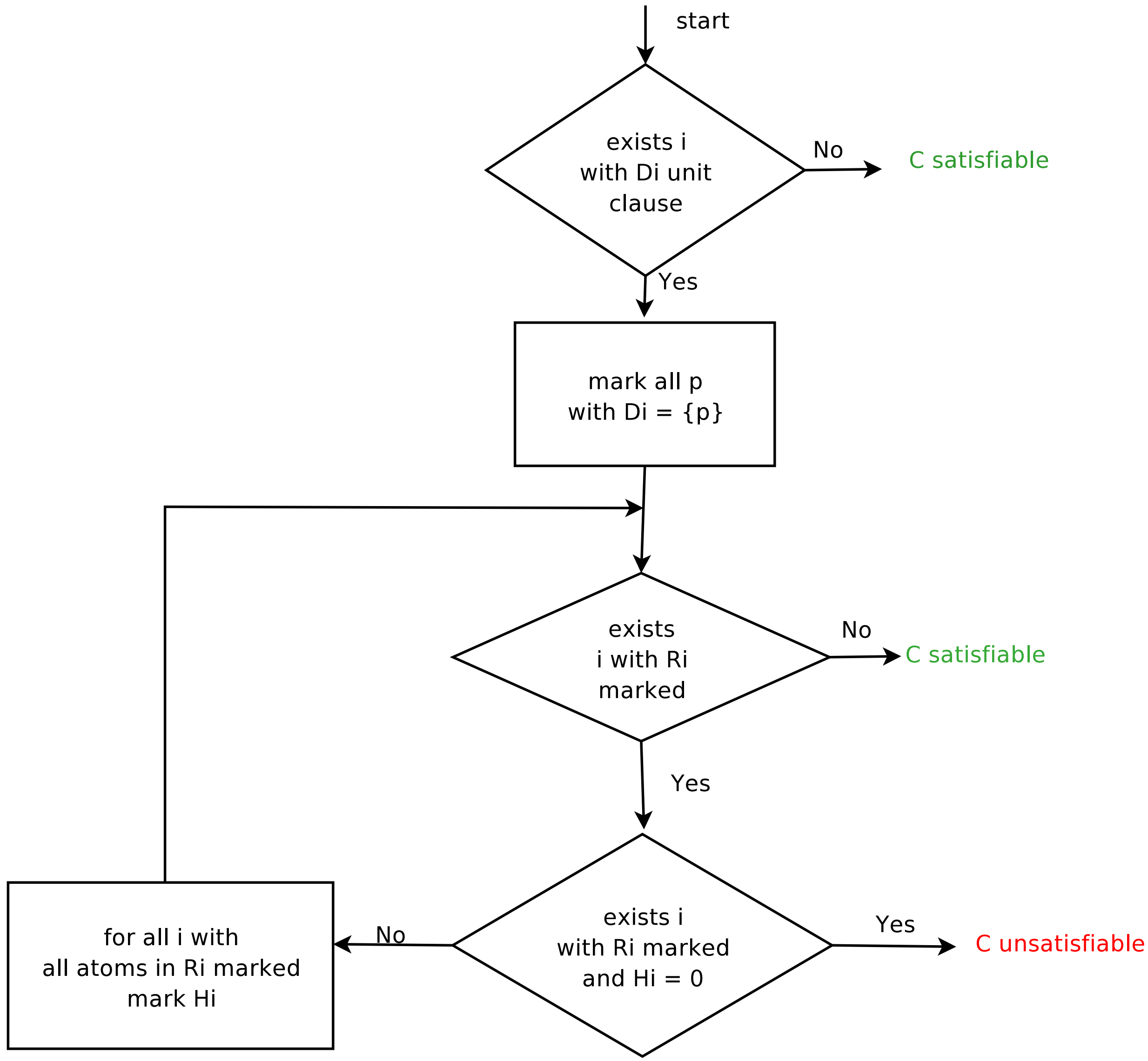
0: IF keine Fakten (Klausel mit leerem Rumpf) vorhanden
THEN Ausgabe: erfüllbar
ELSE markiere alle Fakten

1: IF keine Klausel $R_i \longrightarrow H_i$ in C, so dass
alle Atome in R_i markiert aber H_i nicht
THEN Ausgabe: erfüllbar
ELSE wähle das erste solche

IF H_i leer
THEN Ausgabe: unerfüllbar
ELSE markiere H_i in C

GOTO 1

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln



Zusammenfassung: Normalformen

- **Literale, Klauseln**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Literale, Klauseln**
- **Konjunktive und Disjunktive Normalform**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Literale, Klauseln**
- **Konjunktive und Disjunktive Normalform**
- **Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Literale, Klauseln**
- **Konjunktive und Disjunktive Normalform**
- **Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln**
- **Umformen in KNF**

Zusammenfassung: Normalformen

- Literale, Klauseln
- Konjunktive und Disjunktive Normalform
- Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
- Umformen in KNF
- Mengenschreibweise

Zusammenfassung: Normalformen

- Literale, Klauseln
- Konjunktive und Disjunktive Normalform
- Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
- Umformen in KNF
- Mengenschreibweise
- Subsumtion

Zusammenfassung: Normalformen

- **Literale, Klauseln**
- **Konjunktive und Disjunktive Normalform**
- **Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln**
- **Umformen in KNF**
- **Mengenschreibweise**
- **Subsumtion**
- **SAT-Problem (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)**

Zusammenfassung: Normalformen

- Literale, Klauseln
- Konjunktive und Disjunktive Normalform
- Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
- Umformen in KNF
- Mengenschreibweise
- Subsumtion
- SAT-Problem (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)
- Horn-Formeln

Zusammenfassung: Normalformen

- Literale, Klauseln
- Konjunktive und Disjunktive Normalform
- Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
- Umformen in KNF
- Mengenschreibweise
- Subsumtion
- SAT-Problem (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)
- Horn-Formeln
- Erfüllbarkeitstest für Hornformeln