

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

**Gegeben**

$$A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

**Gegeben**

$$A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

**Zu  $A_n$  äquivalente KNF**

$$\bigwedge \{ P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\} \}$$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

## Gegeben

$$A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

## Zu $A_n$ äquivalente KNF

$$\bigwedge \{ P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\} \}$$

## Größe der KNF

- Literale in  $A_n$ :  $2 * n$
- Literale in KNF von  $A_n$ :  $n * 2^n$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu  $A_n$  äquivalente KNF

$$\bigwedge \{ P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\} \}$$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu  $A_n$  äquivalente KNF

$$\bigwedge \{ P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\} \}$$

Für  $n = 3$

$$(P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \quad \wedge \quad (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \quad \wedge$$

$$(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \quad \wedge \quad (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \quad \wedge$$

$$(P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \quad \wedge \quad (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \quad \wedge$$

$$(P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \quad \wedge \quad (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2})$$

# KNF: Mengenschreibweise

## Notation

- Klausel als Menge von Literalen
- Formel in KNF als Menge von Klauseln

# KNF: Mengenschreibweise

## Notation

- Klausel als Menge von Literalen
- Formel in KNF als Menge von Klauseln

## Beispiel

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$$

als

$$\{ \{ \neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1} \}, \{ \neg P_{1,2}, B_{1,1} \}, \{ \neg P_{2,1}, B_{1,1} \} \}$$

# KNF: Mengenschreibweise

## Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**
  - = leere Menge von Literalen
  - = leere Disjunktion
  - =

# KNF: Mengenschreibweise

## Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**
  - = leere Menge von Literalen
  - = leere Disjunktion
  - = 0

# KNF: Mengenschreibweise

## Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**
  - = leere Menge von Literalen
  - = leere Disjunktion
  - = 0
- **Leere Menge von Klauseln**
  - = leere Konjunktion
  - =

# KNF: Mengenschreibweise

## Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**
  - = leere Menge von Literalen
  - = leere Disjunktion
  - = 0
- **Leere Menge von Klauseln**
  - = leere Konjunktion
  - = 1

# Vereinfachung der KNF: Subsumtion

## Theorem

Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln  $K, K'$  mit

$$K \subsetneq K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn  $K'$  weggelassen wird

# Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

## Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel  $F$

Frage: Ist  $F$  erfüllbar?

# Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

## Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel  $F$

Frage: Ist  $F$  erfüllbar?

## Theorem (ohne Beweis)

SAT ist ein **NP-vollständiges** Problem

# NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar

# NP-Vollständigkeit

## Zur Erinnerung / Vorausschau

**NP-vollständig heißt:**

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**
- **Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden**

# NP-Vollständigkeit

## Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar
- Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden
- Wenn es stimmt, dass  $NP \neq P$ , dann ist SAT nicht in polynomieller Zeit entscheidbar

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

**Definition:  $k$ -KNF**

**KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben**

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

## Definition: $k$ -KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben

## Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

## Definition: $k$ -KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben

## Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

## Definition: $k$ -KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben

## Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)
- 2-KNF ist polynomiell entscheidbar (Beweisidee an Tafel)

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

## Definition: $k$ -KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben

## Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)
- 2-KNF ist polynomiell entscheidbar (Beweisidee an Tafel)
- DNF ist polynomiell entscheidbar (Beweis einfach)