Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n \quad = \quad (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n \quad = \quad (P_{1,1} \land P_{1,2}) \lor \ldots \lor (P_{n,1} \land P_{n,2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \lor \ldots \lor P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2\}\}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben

$$A_n \quad = \quad (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \ldots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1, \ldots, n\} \to \{1,2\}\}$$

Größe der KNF

- **Literale in A_n:** $2 * n$
- **Literale in KNF von A_n:** $n * 2^n$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge\{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1,\ldots,n\} \rightarrow \{1,2\}\}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge\{P_{1,f(1)} \vee \ldots \vee P_{n,f(n)} \mid f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}\}$$

Für $n = 3$

$$\begin{array}{lclc}
(P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) & \wedge & (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) & \wedge \\
(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) & \wedge & (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) & \wedge \\
(P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) & \wedge & (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) & \wedge \\
(P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) & \wedge & (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) &
\end{array}$$

KNF: Mengenschreibweise

Notation

- **Klausel als Menge von Literalen**
- **Formel in KNF als Menge von Klauseln**

KNF: Mengenschreibweise

Notation

- Klausel als Menge von Literalen
- Formel in KNF als Menge von Klauseln

Beispiel

$$(\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}) \;\land\; (\neg P_{1,2} \lor B_{1,1} \;\land\; (\neg P_{2,1} \lor B_{1,1})$$

als

$$\{\, \{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1})\},\; \{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\},\; \{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\} \,\}$$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  =

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

- **Leere Menge von Klauseln**

  = leere Konkunktion

  =

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- **Leere Klausel**

  = leere Menge von Literalen

  = leere Disjunktion

  = 0

- **Leere Menge von Klauseln**

  = leere Konkunktion

  = 1

Vereinfachung der KNF: Subsumtion

Theorem

Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subsetneq K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: **Eine aussagenlogische Formel F**

Frage: **Ist F erfüllbar?**

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar?

Theorem (ohne Beweis)

SAT ist ein NP-vollständiges Problem

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**
- **Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden**

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung / Vorausschau

NP-vollständig heißt:

- **SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar**
- **Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden**
- **Wenn es stimmt, dass $NP \neq P$, dann ist SAT nicht in polynomieller Zeit entscheidbar**

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- **KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)**

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- KNF ist NP-vollständig (ohne Beweis)
- 3-KNF ist NP-vollständig (Beweisidee an Tafel)
- 2-KNF ist polynomiell entscheidbar (Beweisidee an Tafel)

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition: k-KNF

KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- **KNF ist NP-vollständig** **(ohne Beweis)**
- **3-KNF ist NP-vollständig** **(Beweisidee an Tafel)**
- **2-KNF ist polynomiell entscheidbar** **(Beweisidee an Tafel)**
- **DNF ist polynomiell entscheidbar** **(Beweis einfach)**