Vorlesung

Logik für Informatiker

6. Aussagenlogik

– Resolution –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**
- **Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform**

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert of Klauseln (in Mengenschreibweise)

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**
- **Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform**
- **Eine einzige Regel**
- **Operiert of Klauseln (in Mengenschreibweise)**

Notation

Leere Klausel: $\square$

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P **eine aussagenlogische Variable**
- C_1, C_2 **Klauseln (können leer sein)**

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition: Resolvente

$C_1 \cup C_2$ heißt Resolvente von $C_1 \cup \{P\}$, $C_2 \cup \{\neg P\}$.

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M = \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\} \,\}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\}\, \}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\ \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\}\ \}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\} \,\}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\ \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\}\ \}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\} \,\}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\ \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\}\ \}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\} \,\}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\Box}$$

Insgesamt

$$M \vdash_{Res} \Box$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge

$$M \quad = \quad \{\, \{P_1, P_2\},\ \{P_1, \neg P_2\},\ \{\neg P_1, P_2\},\ \{\neg P_1, \neg P_2\} \,\}$$

Resolution

$$\frac{\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \qquad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt

$$M \vdash_{Res} \square$$

also M unerfüllbar

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

ist allgemeingültig

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg((A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$$

unerfüllbar ist

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg((A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$$

unerfüllbar ist

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M

(1)	[]	$\{\neg A, B\}$
(2)	[]	$\{\neg B, C\}$
(3)	[]	$\{A\}$
(4)	[]	$\{\neg C\}$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M

(1)	[]	$\{\neg A, B\}$
(2)	[]	$\{\neg B, C\}$
(3)	[]	$\{A\}$
(4)	[]	$\{\neg C\}$
(5)	$[1, 3]$	$\{B\}$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M

(1)	[]	$\{\neg A, B\}$
(2)	[]	$\{\neg B, C\}$
(3)	[]	$\{A\}$
(4)	[]	$\{\neg C\}$
(5)	$[1, 3]$	$\{B\}$
(6)	$[2, 5]$	$\{C\}$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M

(1)	[]	$\{\neg A, B\}$
(2)	[]	$\{\neg B, C\}$
(3)	[]	$\{A\}$
(4)	[]	$\{\neg C\}$
(5)	$[1, 3]$	$\{B\}$
(6)	$[2, 5]$	$\{C\}$
(7)	$[4, 6]$	$\square$

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- **Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben**
  z.B.: $\{A, B\}$ **und** $\{\neg A, \neg B\}$

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- **Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben**
  z.B.: $\{A, B\}$ **und** $\{\neg A, \neg B\}$

- $\{A, B, C\}$ **und** $\{\neg A, \neg B, D\}$ **haben NICHT** $\{C, D\}$ **als Resolvente**

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- **Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben**
  z.B.: $\{A, B\}$ **und** $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ **und** $\{\neg A, \neg B, D\}$ **haben NICHT** $\{C, D\}$ **als Resolvente**

Heuristik

Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2,\ \neg P_1 \vee P_2,\ \neg P_1 \vee \neg P_2,\ P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2,\ \neg P_1 \vee P_2,\ \neg P_1 \vee \neg P_2,\ P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \qquad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_1, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2} \qquad \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2,\ \neg P_1 \vee P_2,\ \neg P_1 \vee \neg P_2,\ P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \qquad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_1, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2} \qquad \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2}$$

Auf diese Weise ist $\Box$ nicht herleitbar

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem

Für eine Menge M von Klauseln gilt

$$M \textbf{ unerfüllbar} \quad \textbf{gdw.} \quad M \vdash_{Res} \square$$

1-Resolution

Regel der 1-Resolution

$$\frac{\{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_2} \qquad \frac{\{\neg P\}, C_2 \cup \{P\}}{C_2}$$

Spezialfall der Resolutionsregel

1-Resolution

Regel der 1-Resolution

$$\frac{\{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_2} \qquad \frac{\{\neg P\}, C_2 \cup \{P\}}{C_2}$$

Spezialfall der Resolutionsregel

Frage

Ist 1-Resolution vollständig?

1-Resolution

Regel der 1-Resolution

$$\frac{\{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_2} \qquad \frac{\{\neg P\}, C_2 \cup \{P\}}{C_2}$$

Spezialfall der Resolutionsregel

Frage

Ist 1-Resolution vollständig?

NEIN

1-Resolution

Beispiel für Unvollständigkeit

$$E = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

- **ist unerfüllbar,**
- **aber mit 1-Resolution ist aus E nichts ableitbar**

Zusammenfassung: Resolution

- **Die Resolutionsregel**

Zusammenfassung: Resolution

- **Die Resolutionsregel**
- **Vorgehensweise für Nachweis der Allgemeingültigkeit: Negation, Klauseln, Resolution**

Zusammenfassung: Resolution

- **Die Resolutionsregel**
- **Vorgehensweise für Nachweis der Allgemeingültigkeit: Negation, Klauseln, Resolution**
- **Korrektheit und Vollständigkeit**

Zusammenfassung: Resolution

- **Die Resolutionsregel**
- **Vorgehensweise für Nachweis der Allgemeingültigkeit: Negation, Klauseln, Resolution**
- **Korrektheit und Vollständigkeit**
- **1-Resolution (unvollständig)**