Vorlesung

Logik für Informatiker

7. Aussagenlogik

– Analytische Tableaus –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**
- **Beweis durch Fallunterscheidung**

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- **Intuitiver als Resolution**

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- **Intuitiver als Resolution**
- **Formeln müssen nicht in Normalform sein**

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl),
  wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl),
  wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- Mehr als eine Regel

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	**Tableau**	
des	**Tableau<u>s</u>**	**(Gen.)**
die	**Tableau<u>s</u>**	**(pl.)**

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	**Tableau**	
des	**Tableau<u>s</u>**	**(Gen.)**
die	**Tableau<u>s</u>**	**(pl.)**
der	**Tableaukalkül**	**(*nicht* das)**

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableaus	(Gen.)
die	Tableaus	(pl.)
der	Tableaukalkül	(*nicht* das)

Englisch

the	tableau	(sing.)
the	tableaux	(pl.)
the	tableau calculus	

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \longrightarrow B)$

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \longrightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(A \wedge B)$
- $A \vee B$
- $A \longrightarrow B$

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

β	β_1	β_2
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \vee B$	A	B
$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F \\ \neg F \\ \hline * \end{array}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ \neg F \\ | \\ * \end{array}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{matrix} \neg P \\ \neg Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{matrix} P \\ \neg Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \land Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \lor Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \longrightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \lor Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \land Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \longrightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Beispiel

$\neg(((\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow C) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow C))$

$(\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow C$

$\neg((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow C)$

$\neg B \longrightarrow A$

$\neg C$

- $\neg(\neg A \longrightarrow B)$
  - $\neg A$
  - $\neg B$
    - $\neg\neg B$
      - B
      - $*$
    - A
      - $*$
- C
  - $*$

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- **Die Regeln sind alle deterministisch**

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in Einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**
- **B ein Ast von T**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**
- **B ein Ast von T**
- **F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß
der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß
der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \quad \in \quad B \cup M$$

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \quad \in \quad B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \quad \in \quad B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

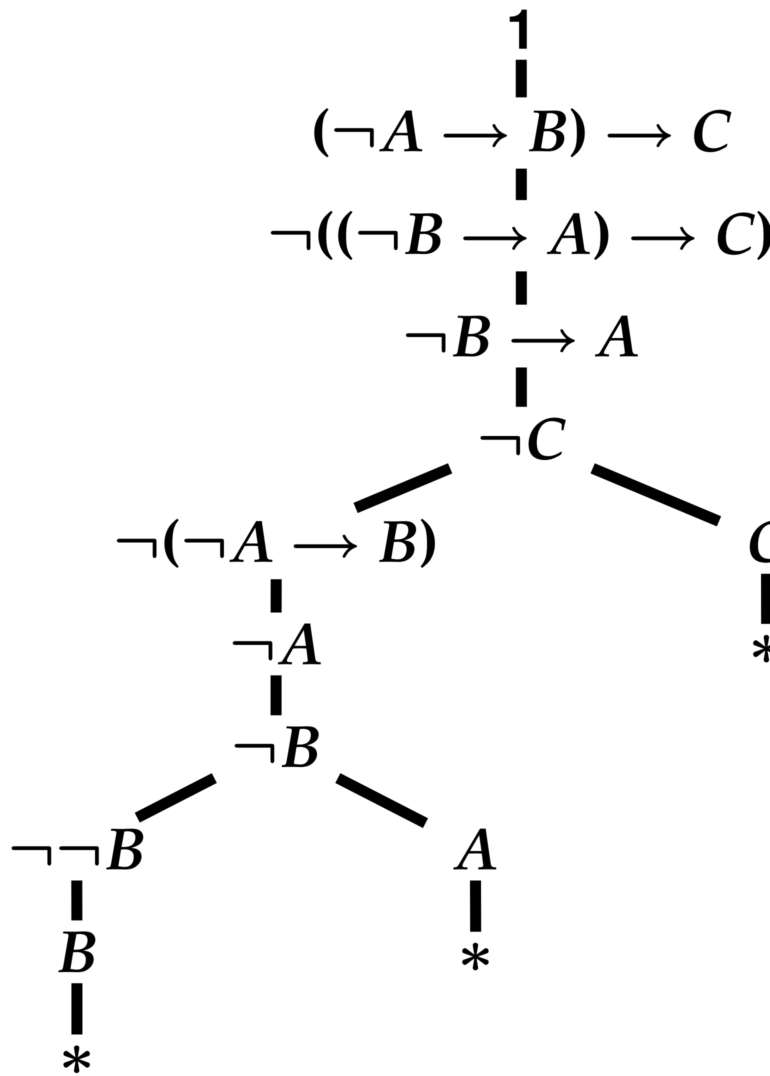
Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für M, das geschlossen ist,
ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel: Nun formal richtig

$$M \;=\; \neg(((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C))$$



Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Also Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Lemma

B offener Ast in voll expandiertem Tableau, dann $B \cup M$ erfüllbar

Also Voll expandierte Tableau für unerfüllbares M ist geschlossen

Klauseltableau

M eine Menge von Klauseln

Klauseltableau

M **eine Menge von Klauseln**

Änderungen

- **Keine α-Regel**

Klauseltableau

M **eine Menge von Klauseln**

Änderungen

- **Keine α-Regel**
- **Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad >2 haben**

Klauseltableau

M eine Menge von Klauseln

Änderungen

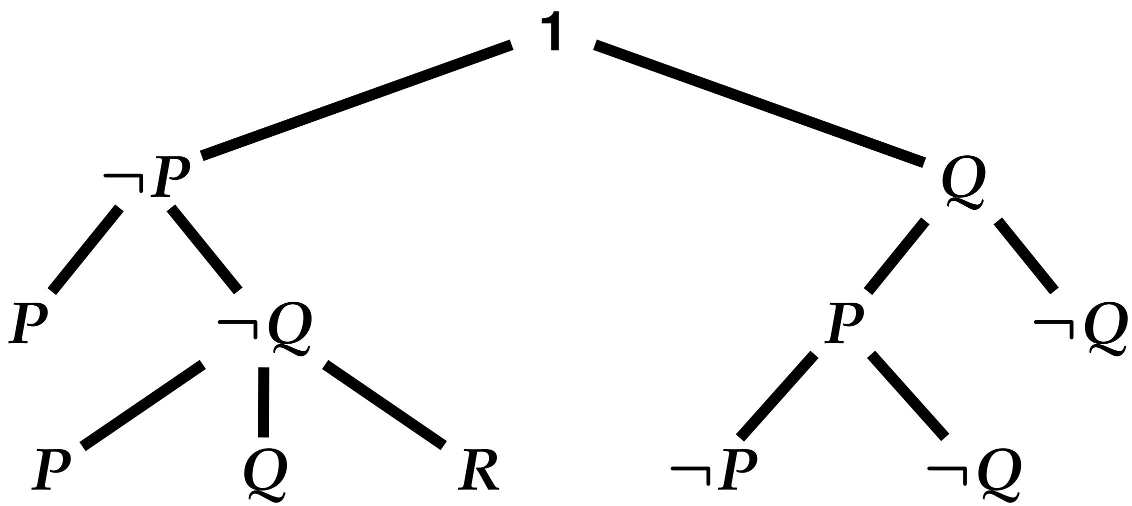
- Keine α-Regel
- Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad >2 haben
- Alle Knoten im Tableau enthalten Literale

Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$

Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{\, \{P, Q, R\},\ \{\neg R\},\ \{\neg P, Q\},\ \{P, \neg Q\},\ \{\neg P, \neg Q\}\, \}$$



Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in $B \cup M$ sein

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in $B \cup M$ sein

Starke Konnektionsbedingung (Modellelimination)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zum Blatt von B sein – außer beim ersten Schritt

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität, starke u. schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität, starke u. schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in Sackgasse führen

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität, starke u. schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in Sackgasse führen

(bei schwacher Konnektionsbedinung nicht)

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität, starke u. schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in Sackgasse führen

(bei schwacher Konnektionsbedinung nicht)

Beispiel: $M = \{ \{P\}, \{\neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\} \}$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F: **Flugreise** V: **Vollpension** M: **Meer** P: **Pool**

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F: Flugreise V: Vollpension M: Meer P: Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$\neg F \longrightarrow (V \wedge M)$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F: **Flugreise** V: **Vollpension** M: **Meer** P: **Pool**

**Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen,
besteht der Vater auf Vollpension am Meer.**

$\neg F \longrightarrow (V \wedge M)$

**Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen:
ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.**

$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F: Flugreise V: Vollpension M: Meer P: Pool

Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen, besteht der Vater auf Vollpension am Meer.

$$\neg F \longrightarrow (V \wedge M)$$

Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf, dass keine Vollpension gebucht wird.

$$\neg P \longrightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Signatur: F: Flugreise V: Vollpension M: Meer P: Pool

**Falls sie nicht mit dem Flugzeug fliegen,
besteht der Vater auf Vollpension am Meer.**

$$\neg F \longrightarrow (V \wedge M)$$

Die Mutter möchte mindestens einen ihrer drei Wünsche erfüllt sehen: ans Meer fliegen, oder am Meer ohne Pool, oder Vollpension und Pool.

$$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$$

Gibt es keinen Pool, so besteht Tochter Lisa auf einer Flugreise und Urlaub am Meer und darauf, dass keine Vollpension gebucht wird.

$$\neg P \longrightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$$

Auch dem Baby soll einer seiner Wünsche erfüllt werden: erstens einen Pool und nicht fliegen oder zweitens Vollpension, dann aber ohne Pool.

$$(P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)$$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Behauptung

Dann müssen sie ans Meer mit Vollpension, mit Pool und ohne Flug.

$M \wedge V \wedge P \wedge \neg F$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Behauptung

Dann müssen sie ans Meer mit Vollpension, mit Pool und ohne Flug.

$M \land V \land P \land \neg F$

Negation der Behauptung:

$\neg M \lor \neg V \lor \neg P \lor F$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

$\neg F \longrightarrow (V \wedge M)$	(1)	$F \vee V$
	(2)	$F \vee M$
$(M \wedge F) \vee (M \wedge \neg P) \vee (V \wedge P)$	(3)	$M \vee V$
	(4)	$M \vee P$
	(5)	$M \vee \neg P \vee V$
	(6)	$F \vee M \vee V$
	(7)	$F \vee M \vee P$
	(8)	$F \vee \neg P \vee V$
$\neg P \longrightarrow (F \wedge M \wedge \neg V)$	(9)	$P \vee F$
	(10)	$P \vee M$
	(11)	$P \vee \neg V$
$(P \wedge \neg F) \vee (V \wedge \neg P)$	(12)	$P \vee V$
	(13)	$\neg F \vee V$
	(14)	$\neg F \vee \neg P$
Negation der Behauptung	(15)	$\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$

Klauseltableau: Weiteres Beispiel

Beobachtung

Konstruktion des Konnektionstableaus

- **bei Beginn mit Klausel (1)**
- **mit Regularität**
- **mit starker Konnektionsbedingung**

Dann

Nahezu deterministische Beweiskonstruktion

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- **Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung**

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- **Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung**
- **Tableauregeln (mit uniformer Notation)**

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung
- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- **Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung**
- **Tableauregeln (mit uniformer Notation)**
- **Formale Definition des Kalküls**
- **Korrektheit und Vollständigkeit**

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung
- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Klauseltableau

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung
- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Klauseltableau
- Regularität

Zusammenfassung: Tableaukalkül

- Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung
- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Klauseltableau
- Regularität
- Schwache und starke Konnektionsbedingung