Vorlesung

Logik für Informatiker

9. Prädikatenlogik

– Syntax und Semantik der Prädikatenlogik –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\longrightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\longleftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)
- **( )** die beiden Klammern

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

- 1 **Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**
- 0 **Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**
- $\neg$ **Negationssymbol („nicht“)**
- $\wedge$ **Konjunktionssymbol („und“)**
- $\vee$ **Disjunktionssymbol („oder“)**
- $\longrightarrow$ **Implikationssymbol („wenn . . . dann“)**
- $\longleftrightarrow$ **Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)**
- **( ) die beiden Klammern**

Quantoren

- $\forall$ **Allquantor („für alle“)**
- $\exists$ **Existenzquantor („es gibt“)**

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x, \; y, \; a, \; b, \; \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x,\ y,\ a,\ b,\ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **mit**

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x, \ y, \ a, \ b, \ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ mit

P: **Prädikatensymbole** **z.B.** $bruderVon, \ >, \ =, \ \ldots$

F: **Funktionssymbole** **z.B.** $2, \ koblenz, \ c, \ sqrt, \ leftLegOf, \ \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x,\ y,\ a,\ b,\ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ mit

P: Prädikatensymbole z.B. $\mathit{bruderVon},\ >,\ =,\ \ldots$

F: Funktionssymbole z.B. $2,\ \mathit{koblenz},\ c,\ \mathit{sqrt},\ \mathit{leftLegOf},\ \ldots$

Bemerkung

Das Gleichheitsprädikat kann enthalten sein

Es wird infix notiert

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Bemerkung

Funktions- und Prädikatensymbole haben ein Stelligkeit $n \geq 0$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Bemerkung

Funktions- und Prädikatensymbole haben ein Stelligkeit $n \geq 0$

Definition: Konstante

Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

z.B. $2,\ koblenz,\ c$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Term_\Sigma$ der Terme über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
– Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge $Term_\Sigma$ der Terme über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Var \subseteq Term_\Sigma$
- **Wenn**
  - $f \in F$
  - n die Stelligkeit von f
  - $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

  dann

  $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Bemerkungen

- **(Insbesondere) alle Konstanten in** $Term_\Sigma$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Bemerkungen

- **(Insbesondere) alle Konstanten in** $Term_\Sigma$
- **Terme bezeichnen Elemente**

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Wenn

- $p \in P$
- n **die Stelligkeit von** p
- $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$$p(t_1, \ldots, t_n) \in Atom_\Sigma$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
- Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Wenn

- $p \in P$
- n die Stelligkeit von p
- $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$$p(t_1, \ldots, t_n) \in Atom_\Sigma$$

Bemerkung Atome haben Wahrheitswerte (im Unterschied zu Termen)

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$bruder\,(\,kingJohn,\; richardTheLionheart\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{bruder}_{\text{Prädikat}}\,(\,\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}},\ \underbrace{richardTheLionheart}_{\text{Konstante}}\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}\ (\ \underbrace{\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}},\ \underbrace{\underbrace{richardTheLionheart}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}}\ )$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{\underbrace{bruder}_{\text{Prädikat}}\,(\,\underbrace{\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}},\ \underbrace{\underbrace{richardTheLionheart}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}}\,)}_{\text{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$> \; (\, laenge(linkesBein(richard)),\; laenge(linkesBein(kingJohn))$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{>}_{\text{Prädikat}} \; (\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\text{Konstante}})),\; \underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}})$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{>}_{\textbf{Prädikat}} \; (\underbrace{\underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Konstante}}))}_{\textbf{Term}}, \; \underbrace{\underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}})}_{\textbf{Term}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{>}_{\text{Prädikat}}\quad (\,\underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\text{Konstante}}))}_{\text{Term}},\ \underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}}}_{\text{Atom}}$$