Vorlesung

Logik für Informatiker

10. Prädikatenlogik

– Substitutionen und Unifikation –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Substitutionen

Definition: Substitution

Belegung von Variablen mit Termen

Formal: **Funktion** $\sigma : Var \longrightarrow Term_{\Sigma}$

Substitutionen

Definition: Substitution

Belegung von Variablen mit Termen

Formal: **Funktion** $\sigma : Var \rightarrow Term_\Sigma$

Schreibweise für σ

$\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$

wobei $\sigma(x) = \begin{cases} t_i & \text{if } x = x_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Definition: Anwendung auf Terme und Formeln

- $\sigma(s(t_1, \ldots, t_n)) = s(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ **für** $s \in F_\Sigma \cup P_\Sigma$

  (insbes.: $\sigma(c) = c$ **für Konstanten** c**)**

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Definition: Anwendung auf Terme und Formeln

- $\sigma(s(t_1, \ldots, t_n)) = s(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ **für** $s \in F_\Sigma \cup P_\Sigma$

  (insbes.: $\sigma(c) = c$ **für Konstanten** c**)**

- $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
- $\sigma(A * B) = \sigma(A) * \sigma(B)$ **für** $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Definition: Anwendung auf Terme und Formeln

- $\sigma(s(t_1, \ldots, t_n)) = s(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ **für** $s \in F_\Sigma \cup P_\Sigma$
  (insbes.: $\sigma(c) = c$ **für Konstanten** c**)**
- $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
- $\sigma(A * B) = \sigma(A) * \sigma(B)$ **für** $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\sigma(QxA) = Qx\sigma'(A)$ **für** $Q \in \{\forall, \exists\}$**,**
  wobei $\sigma' = \sigma \backslash \{x/t \mid t \in Term_\Sigma\}$

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Definition: Anwendung auf Terme und Formeln

- $\sigma(s(t_1, \ldots, t_n)) = s(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ **für** $s \in F_\Sigma \cup P_\Sigma$

  (insbes.: $\sigma(c) = c$ **für Konstanten** c**)**

- $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
- $\sigma(A * B) = \sigma(A) * \sigma(B)$ **für** $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- $\sigma(QxA) = Qx\sigma'(A)$ **für** $Q \in \{\forall, \exists\}$,

  wobei $\sigma' = \sigma \setminus \{x/t \mid t \in Term_\Sigma\}$

- $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)\}$

Substitutionen

Notation: Substitutionsanwendung in Postfix-Schreibweise

- $F\sigma$ **für** $\sigma(F)$
- $t\sigma$ **für** $\sigma(t)$

Substitutionen

Notation: Substitutionsanwendung in Postfix-Schreibweise

- $F\sigma$ **für** $\sigma(F)$
- $t\sigma$ **für** $\sigma(t)$

Konkatenation von Substitutionen

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$

Nota bene

$$F(\sigma \circ \tau) = F\tau\sigma$$

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Achtung (I):
Alle Vorkommen einer Variablen werden simultan ersetzt!

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Achtung (I):
Alle Vorkommen einer Variablen werden simultan ersetzt!

Beispiel

$$\sigma = \{x/y,\ y/z\}$$

dann

$$(f(x,y))\sigma = f(y,z)$$

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Achtung (II):
Nur freie Variablenvorkommen werden ersetzt!

Substitutionen: Anwendung auf Terme und Formeln

Achtung (II):
Nur freie Variablenvorkommen werden ersetzt!

Beispiel

$$\sigma = \{x/c,\ y/d\}$$

dann

$$(\forall y\, p(x, y))\sigma = \forall y\, (c, y)$$

Besondere Substitutionen

Definition: Variablenumbenennung

Eine Substitution ist eine Variablenumbenennung,

falls sie eine Permutation auf Var ist

Besondere Substitutionen

Definition: Variablenumbenennung

Eine Substitution ist eine Variablenumbenennung,

falls sie eine Permutation auf Var ist

Definition: Identische Substitution

id **bezeichent die identische Substitution, d.h.**

$id(x) = x$ **für alle** $x \in Var$

Besondere Substitutionen

Definition: Variablenumbenennung

Eine Substitution ist eine Variablenumbenennung,

falls sie eine Permutation auf Var ist

Definition: Identische Substitution

id **bezeichnet die identische Substitution, d.h.**

$id(x) = x$ **für alle** $x \in Var$

Definition: Grundsubstitution

Eine Substitution, die alle Variablen mit Grundtermen (variablenfreien Termen) belegt, heißt Grundsubstitution

Substitutionstheorem

Substitutionstheorem

- I eine prädikatenlogische Interpretation
- $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ eine Substitution
- F eine Formel

dann

$$I(F\sigma) \; = \; I_{x_1/I(t_1),\ldots,x_n/I(t_n)}(F)$$

Substitutionstheorem

Substitutionstheorem

- I eine prädikatenlogische Interpretation
- $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ eine Substitution
- F eine Formel

dann

$$I(F\sigma) \;=\; I_{x_1/I(t_1),\ldots,x_n/I(t_n)}(F)$$

Beweis

Einfach durch Induktion über strukturellen Aufbau von F

Kollisionsfreie Substitution

Definition: Kollisionsfreie Substitution

(*engl.:* admissible substitution)

- **σ eine Substitution**
- **F eine Formel**

σ heißt kollisionsfrei (bzgl. F),

falls es folgendes *nicht* gibt:

Kollisionsfreie Substitution

Definition: Kollisionsfreie Substitution

(*engl.:* admissible substitution)

- **σ eine Substitution**
- **F eine Formel**

σ heißt kollisionsfrei (bzgl. F),

falls es folgendes *nicht* gibt:

- **eine freies Vorkommen einer Variablen z, das**
- **im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ oder $\exists x$ liegt, und**
- **x kommt in $\sigma(z)$ vor**

Kollisionsfreie Substitution

Beispiel

$\{z/x\}$ **ist nicht kollisionsfrei bzgl.** $\forall x\, p(x, z)$

Kollisionsfreie Substitution

Beispiel

$\{z/x\}$ **ist nicht kollisionsfrei bzgl.** $\forall x\, p(x, z)$

Intuitive Bedeutung des Begriffs

Aus $\forall x\, F$

folgt $F\{x/t\}$

Dies gilt allerdings i.a. nur, wenn $\{x/t\}$ kollisionsfrei für F

Gebundene Umbenennung

Definition: Gebundene Umbenennung

Alle Vorkommen einer Variablen x

- **in einer Quantifizierung $\forall x$ oder $\exists x$**
- **im Skopus dieser Quantifizierung**

werden durch eine neue (bisher nicht vorkommende) Variable y ersetzt

Gebundene Umbenennung

Definition: Gebundene Umbenennung

Alle Vorkommen einer Variablen x

- **in einer Quantifizierung $\forall x$ oder $\exists x$**
- **im Skopus dieser Quantifizierung**

werden durch eine neue (bisher nicht vorkommende) Variable y ersetzt

Eigenschaften

- **Gebundene Umbenennung ist Äquivalenzumformung**
- **Gebundene Umbenennung erlaubt, Kollisionen zu beseitigen**