Vorlesung

Logik für Informatiker

11. Prädikatenlogik

– Normalformen –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Negationsnormalform

Definition: Negationsnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\longrightarrow$ und $\leftrightarrow$ kommen in A nicht vor
- jedes Negationszeichen in A steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Negationsnormalform: Beispiele

NNF

- p
- $\neg p$
- $(\neg p \vee q) \wedge (r \vee (\neg r \wedge q))$

Negationsnormalform: Beispiele

NNF

- p
- $\neg p$
- $(\neg p \vee q) \wedge (r \vee (\neg r \wedge q))$

Nicht NNF

- $\neg\neg p$
- $\neg(p \vee q)$
- $p \rightarrow q$

Bereinigte Formeln

Definition: Bereinigte Formel

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- **Keine Variable in A sowohl gebunden als auch frei vorkommt**
- **Keine Variable mehr als einmal in A quantifiziert ist**

Bereinigte Formeln: Beispiele

Bereinigt

- $p \vee q$
- $\forall x \exists y (p(x) \vee q(x, y) \vee \exists z (r(x, z)))$

Bereinigte Formeln: Beispiele

Bereinigt

- $p \lor q$
- $\forall x \exists y (p(x) \lor q(x, y) \lor \exists z (r(x, z)))$

Nicht bereinigt

- $p(x) \lor \forall x\, q(x)$
- $(\forall x\, p(x)) \lor (\forall x\, q(x))$

Pränexnormalform

Definition: Pränexnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Pränexnormalform (PNF), falls:

$$A \quad = \quad Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n B$$

wobei

- $Q_1 \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- $x_1, \ldots, x_n \in Var$
- B **quantorenfrei**

(dann heißt B „Matrix“ von A)

Pränexnormalform: Beispiele

In PNF

- $p(x) \lor q(x)$
- $\forall x \exists y (p(x) \lor q(y))$

Pränexnormalform: Beispiele

In PNF

- $p(x) \vee q(x)$
- $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$

Nicht in PNF

- $(\forall x\, p(x)) \vee (\exists y\, q(y))$

Umwandlung in Pränexnormalform

Theorem

Zu jeder Formel $A \in For_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Umwandlung in Pränexnormalform

Theorem

Zu jeder Formel $A \in For_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Konstruktiver Beweis

1. **Formel bereinigen**
2. **Formel in NNF transformieren (Negationszeichen nach innen)**
   - $\neg\forall \quad \equiv \quad \exists\neg$ **und** $\neg\exists \quad \equiv \quad \forall\neg$
   - **aussagenlogische Umformungen**
3. **Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)**

Skolemnormalform

Definition: Skolemnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- **A ist in Pränexnormalform**
- **A ist geschlossen (enthält keine freien Variablen)**
- **enthält nur universelle Quantoren**
- **die Matrix von A ist in konjunktiver Normalform**

Skolemnormalform

Definition: Skolemnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- **A ist in Pränexnormalform**
- **A ist geschlossen (enthält keine freien Variablen)**
- **enthält nur universelle Quantoren**
- **die Matrix von A ist in konjunktiver Normalform**

Bemerkung

In der Literatur manchmal:
„Skolemnormalform“ als „Klauselnormalform“ bezeichnet

Skolemnormalform: Beispiele

In Skolemnormalform

- $\forall x \forall y (p(x) \lor q(y))$

Skolemnormalform: Beispiele

In Skolemnormalform

- $\forall x \forall y (p(x) \vee q(y))$

Nicht in Skolemnormalform

- $\forall y (p(x) \vee q(y))$
- $(\forall x\, p(x)) \vee (\forall y\, q(y))$
- $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$
- $\forall x \forall y (p(x) \vee (q(y) \wedge r(x)))$

Umformung in Skolemnormalform

Leider . . .

Es gibt NICHT zu jeder Formel eine äquivalente Formel in Skolemnormalform

(Existenzquantoren können nicht wegtransformiert werden)

Jedoch . . .

Umformung in Skolemnormalform

Leider . . .

Es gibt NICHT zu jeder Formel eine äquivalente Formel in Skolemnormalform

(Existenzquantoren können nicht wegtransformiert werden)

Jedoch . . .

Definition: Ërfüllbarkeitsäquivalenz

Formeln $A, B \in For_\Sigma$ sind erfüllbarkeitsäquivalent, falls sie

- **beide erfüllbar** **oder**
- **beide unerfüllbar**

sind

Existenzquantoren vs. Funktionssymbole

Darstellung mit Existenzquantor

1. $\forall x \exists y (y = x + x)$
2. $\forall x \exists y (x < y)$
3. $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x + z = y)$

Existenzquantoren vs. Funktionssymbole

Darstellung mit Existenzquantor

1. $\forall x \exists y (y = x + x)$
2. $\forall x \exists y (x < y)$
3. $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x + z = y)$

Darstellung mit Funktionszeichen

1. $\forall x (do(x) = x + x)$
2. $\forall x (x < gr(x))$
3. $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x + \mathit{diff}(x, y) = y)$

Existenzquantoren vs. Funktionssymbole

Darstellung mit Existenzquantor

1. $\forall x \exists y (y = x + x)$
2. $\forall x \exists y (x < y)$
3. $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x + z = y)$

Darstellung mit Funktionszeichen

1. $\forall x (do(x) = x + x)$
2. $\forall x (x < gr(x))$
3. $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x + \mathit{diff}(x, y) = y)$

„Gib den existierenden Elementen einen Namen"
(wenn mehr als eines existiert wähle eines)

Skolemisierung

Definition: Skolemisierung

Gegeben

$$A \quad = \quad \exists x\, B$$

Dann ist

$$A_{sk} \quad = \quad B\{x / f(y_1, \ldots, y_n)\}$$

die Skolemisierung von A, wobei

- f **neu (nicht in A)**
- $y_1, \ldots, y_n$ **die in A frei vorkommenden Variablen**

Skolemisierung

Theorem

A_{sk} **die Skolemisierung von** A**, dann:**

- A **und** A_{sk} **erfüllbarkeitsäquivalent**
- $A_{sk} \models A$
- **Im allgemeinen NICHT:**
  $A \models A_{sk}$

Theorem

- C **hat Unterformel** A
- C' **entsteht durch Ersetzung von** A **durch** A_{sk}

Dann sind C **und** C' **erfüllbarkeitsäquivalent**

Skolemisierung

Theorem

A_{sk} **die Skolemisierung von** A**, dann:**

- A **und** A_{sk} **erfüllbarkeitsäquivalent**
- $A_{sk} \models A$
- **Im allgemeinen NICHT:**
  $A \models A_{sk}$

Theorem

- C **hat Unterformel** A
- C' **entsteht durch Ersetzung von** A **durch** A_{sk}

Dann sind C **und** C' **erfüllbarkeitsäquivalent**

Umformung in Skolemnormalform

Theorem

Zu jeder Formel $A \in For_\Sigma$ gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform

Umformung in Skolemnormalform

Theorem

Zu jeder Formel $A \in For_{\Sigma}$ gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform

Konstruktiver Beweis

1. Formel in Pränexnormalform umformen
2. Alle freien Variablen existentiell quantifizieren
3. Existenzquantoren durch Skolemisierung entfernen
4. Matrix in konjunktive Normalform transformieren (aussagenlogische Umformungen)

Umformung in Skolemnormalform

Beispiel

Gegeben

$$\forall x(p(y) \;\land\; \exists z\, q(x, z))$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in SNF

$$\forall x(p(c) \;\land\; q(x, f(x)))$$

Umformung in Skolemnormalform

Beispiel

Gegeben

$$\forall w(\exists x(p(w,x) \;\vee\; \forall y(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in SNF

$$\forall x \forall y\, ((p(w,f(w)) \vee q(w,f(w),y)) \wedge$$

$$(p(w,f(w)) \vee r(y,g(w,y))))$$

Klauselnormalform

Definition: Klauselnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Klauselnormalform, falls sie eine Konjunktion von Disjunktion von Literalen ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$$

Klauselnormalform

Definition: Klauselnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Klauselnormalform, falls sie eine Konjunktion von Disjunktion von Literalen ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$$

(wie in Aussagenlogik, jedoch mit prädikatenlogischen Literalen)

Klauselnormalform

Definition: Klauselnormalform

Eine Formel $A \in For_\Sigma$ ist in Klauselnormalform, falls sie

eine Konjunktion von Disjunktion von Literalen ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}$$

(wie in Aussagenlogik, jedoch mit prädikatenlogischen Literalen)

Mengenschreibweise

$$\{\ \{L_{1,1}, \ldots, L_{1,m_1}\},\ \ldots,\ \{L_{n,1}, \ldots, L_{n,m_n}\}\ \}$$

Umformung in Klauselnormalfom

Theorem

Zu jeder Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform

Umformung in Klauselnormalfom

Theorem

Zu jeder Formel gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform

Konstruktiver Beweis

1. **Umformung in Skolemnormalform**
2. **Allquantoren weglassen (freie Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert)**

Umformung in Klauselnormalfom

Beispiel

Gegeben

$$\exists x(p(w,x) \;\vee\; \forall y(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z)))$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform

$$\forall x \forall y\; ((p(w,f(w)) \vee q(w,f(w),y)) \wedge$$

$$(p(w,f(w)) \vee r(y,g(w,y))))$$

Umformung in Klauselnormalfom

Beispiel

Gegeben

$$\exists x(p(w,x) \ \vee \ \forall y(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z)))$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform

$$\forall x \forall y \ ((p(w,f(w)) \vee q(w,f(w),y)) \wedge$$

$$(p(w,f(w)) \vee r(y,g(w,y))))$$

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform

$$((p(w,f(w)) \vee q(w,f(w),y)) \wedge$$

$$(p(w,f(w)) \vee r(y,g(w,y))))$$

Umformung in Klauselnormalfom

Beispiel (Fortsetzung)

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform

$$((p(w, f(w)) \vee q(w, f(w), y)) \wedge$$

$$(p(w, f(w)) \vee r(y, g(w, y))))$$

Umformung in Klauselnormalfom

Beispiel (Fortsetzung)

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform

$$((p(w, f(w)) \vee q(w, f(w), y)) \wedge$$

$$(p(w, f(w)) \vee r(y, g(w, y))))$$

in Mengenschreibweise

$$(\{\ p(w, f(w)),\ q(w, f(w), y))\ \},$$

$$\{\ p(w, f(w)),\ r(y, g(w, y))\ \}$$

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**
- **Bereinigte Formel**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**
- **Bereinigte Formel**
- **Pränexnormalform**

Zusammenfassung: Normalformen

- Negationsnormalform
- Bereinigte Formel
- Pränexnormalform
- Umwandlung in Pränexnormalform

Zusammenfassung: Normalformen

- Negationsnormalform
- Bereinigte Formel
- Pränexnormalform
- Umwandlung in Pränexnormalform
- Skolemnormalform

Zusammenfassung: Normalformen

- Negationsnormalform
- Bereinigte Formel
- Pränexnormalform
- Umwandlung in Pränexnormalform
- Skolemnormalform
- Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**
- **Bereinigte Formel**
- **Pränexnormalform**
- **Umwandlung in Pränexnormalform**
- **Skolemnormalform**
- **Erfüllbarkeitsäquivalenz**
- **Skolemisierung**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**
- **Bereinigte Formel**
- **Pränexnormalform**
- **Umwandlung in Pränexnormalform**
- **Skolemnormalform**
- **Erfüllbarkeitsäquivalenz**
- **Skolemisierung**
- **Umwandlung in Skolemnormalform**

Zusammenfassung: Normalformen

- **Negationsnormalform**
- **Bereinigte Formel**
- **Pränexnormalform**
- **Umwandlung in Pränexnormalform**
- **Skolemnormalform**
- **Erfüllbarkeitsäquivalenz**
- **Skolemisierung**
- **Umwandlung in Skolemnormalform**
- **Klauselnormalform**