Vorlesung

Logik für Informatiker

12. Prädikatenlogik

– Resolution –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Zur Erinnerung

Definition: Aussagenlogische Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad C_2 \cup \{\neg P\}}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P **eine aussagenlogische Variable**
- C_1, C_2 **Klauseln (können leer sein)**

Zur Erinnerung

Definition: Aussagenlogische Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad C_2 \cup \{\neg P\}}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P **eine aussagenlogische Variable**
- C_1, C_2 **Klauseln (können leer sein)**

Prädikatenlogische Klauseln

Sind (implizit) universell bzgl. der vorkommenden Variablen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- **die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)** $\longrightarrow$ **ggf. umbenennen**
- σ **ein allgemeinster Unifikator (MGU) von** L, L' **ist**

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel

$$\begin{aligned}\{L\} \cup C_1 &= \{\overbrace{p(a,x)}^{L},\ p(x,x)\} \\ \{\neg L'\} \cup C_2 &= \{\neg \overbrace{p(y,y)}^{L'}\}\end{aligned}$$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel

$$\begin{aligned}
\{L\} \cup C_1 &= \{\overbrace{p(a, x)}^{L},\ p(x, x)\} \\
\{\neg L'\} \cup C_2 &= \{\neg\overbrace{p(y, y)}^{L'}\} \\
\\
\sigma &= \{y/a, x/a\}
\end{aligned}$$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\{L\} \cup C_1 &= \{\overbrace{p(a,x)}^{L},\ p(x,x)\} \\
\{\neg L'\} \cup C_2 &= \{\neg\overbrace{p(y,y)}^{L'}\} \\
\sigma &= \{y/a,\ x/a\} \\
R &= \{p(x,x)\}\sigma \cup \{\}\sigma \\
&= \{p(a,a)\}
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution

Resolutionsregel in dieser Form alleine unvollständig für PL

Prädikatenlogische Resolution

Resolutionsregel in dieser Form alleine unvollständig für PL

Beispiel

$$\{\{p(x), p(y)\}, \{\neg p(u), \neg p(v)\}\}$$

- **unerfüllbar**
- **aber nur Resolventen der Länge 2**

Prädikatenlogische Resolution

Faktorisierung

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C}{(\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C)\sigma}$$

wobei

σ allgemeinster Unifikatior (MGU) von $\{L_1, \ldots, L_n\}$ ist

Prädikatenlogische Resolution

Faktorisierung

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C}{(\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C)\sigma}$$

wobei

σ allgemeinster Unifikatior (MGU) von $\{L_1, \ldots, L_n\}$ ist

$(\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C)\sigma$ heißt Faktor von $\{L_1, \ldots, L_n\} \cup C$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel für Faktorisierung

$$\frac{\{p(x), p(y), r(z)\}}{\{p(x), r(z)\}}$$

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel für Faktorisierung

$$\frac{\{p(x), p(y), r(z)\}}{\{p(x), r(z)\}}$$

$$\frac{\{p(x), p(y), p(a), r(z)\}}{\{p(a), r(z)\}}$$

Prädikatenlogische Resolution

Resolution + Faktorisierung

Günstiger ist es, Resolutionsregel und Faktorisierungsregel in eine Regel zusammenzuziehen

Prädikatenlogische Resolution

Resolution + Faktorisierung

Günstiger ist es, Resolutionsregel und Faktorisierungsregel in eine Regel zusammenzuziehen

$$\frac{C_1 \cup \{L_1, \ldots, L_n\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'_1, \ldots, \neg L'_m\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- **die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\longrightarrow$ ggf. umbenennen**
- σ **ein allgemeinster Unifikator (MGU) von** $L_1, \ldots, L_n, L'_1, \ldots, L'_m$ **ist**

Prädikatenlogische Resolution

Beispiel

$$\frac{\{p(x), p(y), r(x)\},\ \{\neg p(u), \neg p(a)\}}{r(a)}$$

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem

Für eine Menge M prädikatenlogischer Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad M \vdash_{Res} \square$$

Prädikatenlogische Resolution: Bemerkungen

Wichtig: Häufige Fehlerquellen

- **Das Bereinigen (Umbenennen) nicht vergessen!**

Prädikatenlogische Resolution: Bemerkungen

Wichtig: Häufige Fehlerquellen

- **Das Bereinigen (Umbenennen) nicht vergessen!**
- **Das Faktorisierungen (falls möglich) nicht vergessen!**

Prädikatenlogische Resolution: Bemerkungen

Wichtig: Häufige Fehlerquellen

- **Das Bereinigen (Umbenennen) nicht vergessen!**
- **Das Faktorisierungen (falls möglich) nicht vergessen!**
- **Selbstresolution ist möglich!**

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (1)

Gegeben die Formel F:

$$
\begin{aligned}
&\big(\forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \land \\
&\ \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow s(x,y)) \\
&\big) \longrightarrow \\
&\big(\forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \land r(z,y)) \rightarrow \\
&\qquad\qquad \exists z (q(x,z) \land s(z,y))) \\
&\big)
\end{aligned}
$$

Gezeigt werden soll die Allgemeingültigkeit von F mittels Resolution

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (2)

Dazu zeigen wir die Unerfüllbarkeit von $\neg F$:

$$
\begin{aligned}
\neg\Big(\Big(\ & \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \wedge \\
& \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow s(x,y)) \\
\Big) \longrightarrow & \\
\Big(\ & \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \wedge r(z,y)) \longrightarrow \\
& \qquad \exists z (q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Diese Formel muss zunächst in Klauselnormalform transformiert werden

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (3)

Elimination der Implikationen:

$$
\begin{aligned}
\neg\Big(\neg\Big(\ & \forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
& \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\Big) \vee & \\
\Big(\ & \forall x \forall y(\neg \exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \vee \\
& \qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (4)

Äußere Negation nach innen schieben:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(\quad & \forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
& \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\Big) \wedge & \\
\neg\Big(& \forall x \forall y(\neg \exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \vee \\
& \qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (5)

Negation an den Allquantoren vorbei:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(\ & \forall x \forall y(\ \neg p(x,y) \lor q(x,y)) \land \\
& \forall x \forall y(\ \neg r(x,y) \lor s(x,y)) \\
\Big) \land & \\
\Big(\ & \exists x \exists y \neg(\neg \exists z(p(x,z) \land r(z,y)) \lor \\
& \qquad \exists z(q(x,z) \land s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (6)

De Morgan:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(\ & \forall x \forall y (\neg p(x,y) \lor q(x,y)) \land \\
& \forall x \forall y (\neg r(x,y) \lor s(x,y)) \\
\Big)\ & \land \\
\Big(\ & \exists x \exists y (\exists z (p(x,z) \land r(z,y)) \land \\
& \qquad\qquad \neg \exists z (q(x,z) \land s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (7)

Negation am Quantor vorbei:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(\; & \forall x \forall y (\neg p(x,y) \lor q(x,y)) \land \\
& \forall x \forall y (\neg r(x,y) \lor s(x,y)) \\
\Big) \land \; & \\
\Big(\; & \exists x \exists y (\exists z (p(x,z) \land r(z,y)) \land \\
& \qquad \forall z \neg (q(x,z) \land s(z,y))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (8)

De Morgan:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(\;& \forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
& \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\Big)\;& \wedge \\
\Big(\;& \exists x \exists y(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)) \wedge \\
& \qquad \forall z(\neg q(x,z) \vee \neg s(z,y))) \\
\Big)\Big)&
\end{aligned}
$$

Nun ist die Formel in Negationsnormalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (9)

Bereinigen der Formel führt zu:

$$
\begin{aligned}
\Big(\Big(& \forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
& \forall x' \forall y'(\neg r(x',y') \vee s(x',y')) \\
\Big) & \wedge \\
\Big(& \exists x'' \exists y'' (\exists z (p(x'',z) \wedge r(z,y'')) \wedge \\
& \qquad \forall z' (\neg q(x'',z') \vee \neg s(z',y''))) \\
\Big)\Big) &
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (10)

Da die Formel bereinigt und in NNF ist,
kann man alle Quantoren nach vorne ziehen:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall x' \forall y' \exists x'' \exists y'' \exists z \forall z' \ \Big(\\
&(\neg p(x, y) \lor q(x, y)) \land \\
&(\neg r(x', y') \lor s(x', y')) \land \\
&p(x'', z) \land \\
&r(z, y'') \land \\
&(\neg q(x'', z') \lor \neg s(z', y''))\Big)
\end{aligned}$$

Nun ist die Formel in Pränexnormalform,
die Matrix der Formel ist auch schon in konjunktiver Normalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (11)

Skolemisieren von x'' und y'':

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall x' \forall y' \exists z \forall z' \big(\\
&(\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge \\
&(\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \wedge \\
&p(f(x, y, x', y'), z) \wedge \\
&r(z, g(x, y, x', y')) \wedge \\
&(\neg q(f(x, y, x', y'), z') \vee \neg s(z', g(x, y, x', y')))\big)
\end{aligned}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (12)

Skolemisieren von z:

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' \forall z' \Big($$

$$(\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge$$

$$(\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \wedge$$

$$p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y')) \wedge$$

$$r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y')) \wedge$$

$$(\neg q(f(x, y, x', y'), z') \vee \neg s(z', g(x, y, x', y')))\Big)$$

Nun ist die Formel in Klauselnormalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (13)

In Klauselschreibweise:

$$\mathbf{1:} \quad \{\neg p(x, y),\ q(x, y)\}$$

$$\mathbf{2:} \quad \{\neg r(x', y'),\ s(x', y')\}$$

$$\mathbf{3:} \quad \{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y')\}$$

$$\mathbf{4:} \quad \{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$$

$$\mathbf{5:} \quad \{\neg q(f(x, y, x', y'), z'),\ \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (14)

$$1: \quad \{\neg p(x,y),\ q(x,y)\}$$

$$2: \quad \{\neg r(x',y'),\ s(x',y')\}$$

$$3: \quad \{p(f(x,y,x',y'), h(x,y,x',y')\}$$

$$4: \quad \{r(h(x,y,x',y'), g(x,y,x',y'))\}$$

$$5: \quad \{\neg q(f(x,y,x',y'), z'),\ \neg s(z', g(x,y,x',y'))\}$$

Resolution der Klauseln 1 und 3. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x, y in 3, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $\{x/f(u,v,x',y'),\ y/h(u,v,x',y')\}$

$$\frac{1: \quad \{\neg p(x,y),\ q(x,y)\} \qquad 3': \quad \{p(f(u,v,x',y'), h(u,v,x',y')\}}{6: \quad \{q(f(u,v,x',y'), h(u,v,x',y')\}}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (15)

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{1:} & \{\neg p(x,y),\ q(x,y)\} \\
\mathbf{2:} & \{\neg r(x',y'),\ s(x',y')\} \\
\mathbf{3:} & \{p(f(x,y,x',y'),h(x,y,x',y')\} \\
\mathbf{4:} & \{r(h(x,y,x',y'),g(x,y,x',y'))\} \\
\mathbf{5:} & \{\neg q(f(x,y,x',y'),z'),\ \neg s(z',g(x,y,x',y'))\} \\
\mathbf{6:} & \{q(f(u,v,x',y'),h(u,v,x',y')\}
\end{array}
$$

Resolution der Klauseln 2 und 4. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 4, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $\{x'/h(x,y,u,v),\ y'/g(x,y,u,v)\}$

$$
\frac{\mathbf{2:}\quad \{\neg r(x',y'),\ s(x',y')\} \qquad \mathbf{4':}\quad \{r(h(x,y,u,v),g(x,y,u,v))\}}{\mathbf{7:}\quad \{s(h(x,y,u,v),g(x,y,u,v))\}}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (16)

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{1:} & \{\neg p(x,y),\ q(x,y)\} \\
\mathbf{2:} & \{\neg r(x',y'),\ s(x',y')\} \\
\mathbf{3:} & \{p(f(x,y,x',y'),h(x,y,x',y')\} \\
\mathbf{4:} & \{r(h(x,y,x',y'),g(x,y,x',y'))\} \\
\mathbf{5:} & \{\neg q(f(x,y,x',y'),z'),\ \neg s(z',g(x,y,x',y'))\} \\
\mathbf{6:} & \{q(f(u,v,x',y'),h(u,v,x',y')\} \\
\mathbf{7:} & \{s(h(x,y,u,v),g(x,y,u,v))\}
\end{array}
$$

Resolution der Klauseln 5 und 6. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 6, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $\{x/u,\ y/v,\ x'/u',\ y'/v',\ z'/h(u,v,u',v')\}$

$$
\frac{\begin{array}{c}\mathbf{5:}\quad \{\neg q(f(x,y,x',y'),z'),\ \neg s(z',g(x,y,x',y'))\} \\ \mathbf{6':}\quad \{q(f(u,v,u',v'),h(u,v,u',v')\}\end{array}}{\mathbf{8:}\quad \{\neg s(h(u,v,u',v'),g(u,v,u',v'))\}}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (17)

$$\begin{array}{ll}
1: & \{\neg p(x,y),\ q(x,y)\} \\
2: & \{\neg r(x',y'),\ s(x',y')\} \\
3: & \{p(f(x,y,x',y'),h(x,y,x',y')\} \\
4: & \{r(h(x,y,x',y'),g(x,y,x',y'))\} \\
5: & \{\neg q(f(x,y,x',y'),z'),\ \neg s(z',g(x,y,x',y'))\} \\
6: & \{q(f(u,v,x',y'),h(u,v,x',y')\} \\
7: & \{s(h(x,y,u,v),g(x,y,u,v))\} \\
8: & \{\neg s(h(u,v,u',v'),g(u,v,u',v'))\}
\end{array}$$

Resolution der Klauseln 7 und 8. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen u, v in 7, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $\{x/u'',\ y/v'',\ u/u',\ v/v'\}$

$$\begin{array}{ll}
7: & \{s(h(x,y,u,v),g(x,y,u,v))\} \\
8': & \{\neg s(h(u'',v'',u',v'),g(u'',v'',u',v'))\} \\
\hline
 & \square
\end{array}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (18)

Damit ist die leere Klausel $\square$ abgeleitet,

also ist die Klauselmenge unerfüllbar,

also ist die Formel $\neg F$ unerfüllbar

also ist die Formel F allgemeingültig

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- **Prädikatenlogische Resolutionsregel**

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- **Prädikatenlogische Resolutionsregel**
- **Faktorisierung**

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- **Prädikatenlogische Resolutionsregel**
- **Faktorisierung**
- **Kombination von Resolution und Faktorisierung**

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- **Prädikatenlogische Resolutionsregel**
- **Faktorisierung**
- **Kombination von Resolution und Faktorisierung**
- **Häufige Fehlerquellen**