Vorlesung

Logik für Informatiker

13. Prädikatenlogik

– Der Satz von Herbrand –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Semantische Bäume

Eine klassische Beweistechnik

Semantische Bäume

Semantische Bäume

Definition: Semantischer Baum

Gegeben:
$\langle p_0, p_1, \ldots \rangle$ **beliebige Aufzählung einer aussagenl. Signatur** Σ

Ein semantischer Baum über Σ **ist markierter, binärer Baum mit:**

Semantische Bäume

Definition: Semantischer Baum

Gegeben:
$\langle p_0, p_1, \ldots \rangle$ **beliebige Aufzählung einer aussagenl. Signatur** Σ

Ein semantischer Baum über Σ **ist markierter, binärer Baum mit:**

1. **Wurzel ist unmarkiert**
2. **Nachfolgerknoten der Wurzel mit** p_0 **und** $\neg p_0$ **markiert**
3. **Ist Knoten mit** p_i **oder** $\neg p_i$ **markiert,**
   sind Nachfolgerknoten mit p_{i+1} **und** $\neg p_{i+1}$ **markiert**

Semantische Bäume

Definition: Semantischer Baum

Gegeben:
$\langle p_0, p_1, \ldots \rangle$ **beliebige Aufzählung einer aussagenl. Signatur** Σ

Ein semantischer Baum über Σ **ist markierter, binärer Baum mit:**

1. **Wurzel ist unmarkiert**
2. **Nachfolgerknoten der Wurzel mit** p_0 **und** $\neg p_0$ **markiert**
3. **Ist Knoten mit** p_i **oder** $\neg p_i$ **markiert,**
   sind Nachfolgerknoten mit p_{i+1} **und** $\neg p_{i+1}$ **markiert**

Bemerkung

Semantische Bäume repräsentieren alle möglichen Σ**-Interpretationen**

Semantische Bäume

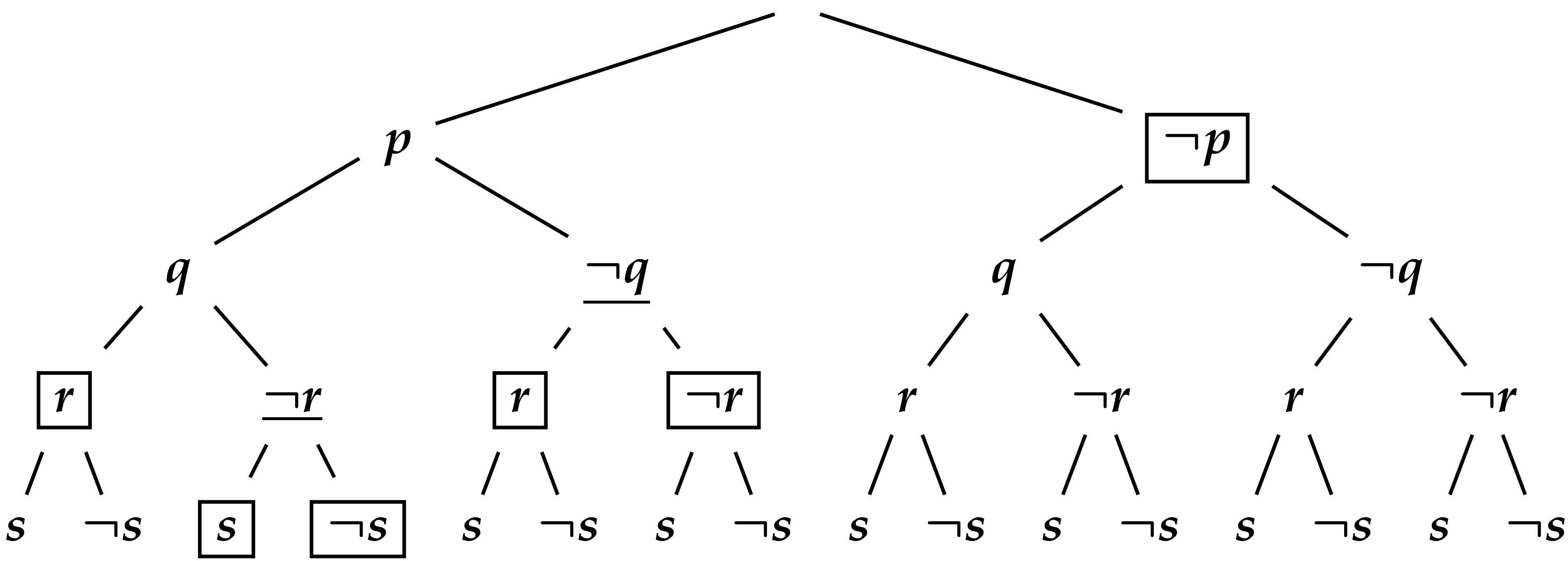
Beispiel

$$\Sigma = \{p, q, r, s\}$$

Semantische Bäume

Beispiel

$$\Sigma = \{p, q, r, s\}$$



Semantische Bäume

Definition: Widerlegungsmenge

Widerlegungsmenge eines Knotens ν eines semantischen Baums:

Alle Markierungen oberhalb und einschließlich von ν

Semantische Bäume

Definition: Widerlegungsmenge

Widerlegungsmenge eines Knotens ν eines semantischen Baums:

Alle Markierungen oberhalb und einschließlich von ν

Definition: Fehlschlagsknoten

Eine Klausel C schlägt fehl bei ν, falls für alle Literale $L \in C$ Markierung $\overline{L}$ in Widerlegungsmenge von ν

Semantische Bäume

Definition: Inferenzknoten

Ein Inferenzknoten ist ein Knoten, dessen beide Nachfolger Fehlschlagsknoten sind.

Semantische Bäume

Definition: Inferenzknoten

Ein Inferenzknoten ist ein Knoten, dessen beide Nachfolger Fehlschlagsknoten sind.

Definition: geschlossener semantischer Baum

Ein semantischer Baum ist geschlossen für S, falls jeder Pfad Fehlschlagsknoten für S enthält

Semantische Bäume

Beispiel

$$\Sigma = \{p, q, r, s\}$$

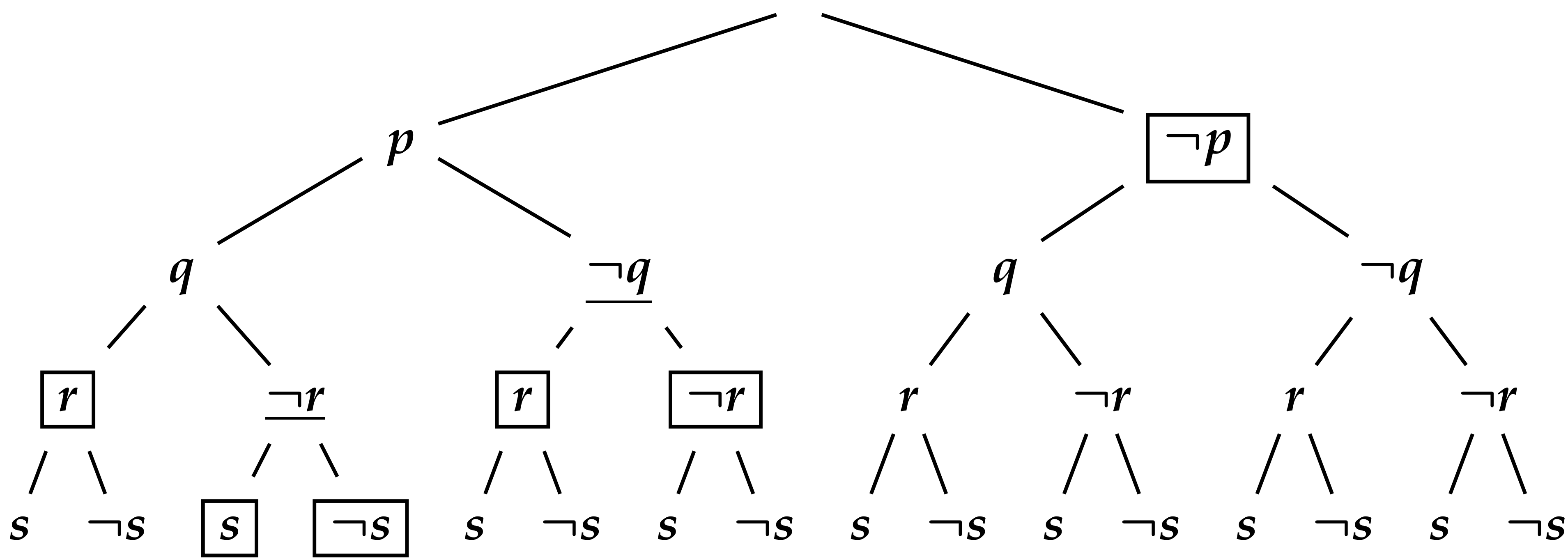
$$S = \{\{p\}, \{r, \neg p, q\}, \{s, \neg q\}, \{\neg q, \neg s\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, q\}\}$$

Semantische Bäume

Beispiel

$$\Sigma = \{p, q, r, s\}$$

$$S = \{\{p\}, \{r, \neg p, q\}, \{s, \neg q\}, \{\neg q, \neg s\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, q\}\}$$



Fehlschlagsknoten gerahmt **Inferenzknoten unterstrichen**

Semantische Bäume

Bemerkung

Die Pfade ohne Fehlschlagsknoten repräsentieren die Modelle von S

Lemma

Ist Klauselmenge S über Σ unerfüllbar,

so ist jeder semantische Baum über Σ geschlossen für S

Semantische Bäume

Beweis

Annahme: Es gibt semantischen Baum, der nicht für S geschlossen ist

Sei π beliebiger Pfad ohne Fehlschlagsknoten für S

Jedes $p \in \Sigma$ genau einmal entweder positiv oder negativ unter den Markierungen M von π

M induziert Modell I von S vermittels

$$I(p) = \begin{cases} W & p \in M \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

Widerspruch zur Unerfüllbarkeit

Semantische Bäume

Theorem (Vollständigkeit aussagenlogischer Rosolution)

Ist S eine unerfüllbare AL Klauselmenge,

dann gilt $S \vdash_{RA} \square$

Semantische Bäume

(Alternativer) Beweis mit semantischen Bäumen

Sei ST geschlossener semantischer Baum für S nach Lemma

Jeder geschlossene semantische Baum hat Inferenzknoten

Sei ν ein Inferenzknoten maximaler Tiefe in ST

Nachfolger von ν sind Fehlschlagsknoten; seien mit p und $\neg p$ markiert

$C, D \in S$ die Klauseln, die bei Nachfolgern von ν fehlschlagen

$C = \{\neg p\} \cup C'$ und $D = \{p\} \cup D'$

C und D resolvieren zu $E = C' \cup D'$

E schlägt bei ν fehl, da Komplemente aller Literale in $C \cup D$ außer p und $\neg p$ schon in Widerlegungsmenge von ν

$S \cup \{E\}$ hat geschlossenen semantischen Baum mit weniger Fehlschlagsknoten als ST

Semantische Bäume

(Alternativer) Beweis mit semantischen Bäumen (Forts.)

Geschlossener semantischer Baum hat endlich viele Fehlschlagsknoten

Also erreicht man nach endlich vielen Schritten eine Klauselmenge mit einzigem Fehlschlagsknoten Wurzel

Nur $\square$ kann für diesen semantischen Baum fehlschlagen

Also $\square$ in dieser Klauselmenge enthalten

Semantische Bäume

Bemerkungen

- **Beweis ist konstruktiv**

Semantische Bäume

Bemerkungen

- Beweis ist konstruktiv
- Resolutionsableitung aus Beweis aber i.a. nicht der kürzeste

Semantische Bäume

Bemerkungen

- Beweis ist konstruktiv
- Resolutionsableitung aus Beweis aber i.a. nicht der kürzeste
- Länge abhängig von gewählter Ordnung auf Σ

Semantische Bäume

Bemerkungen

- Beweis ist konstruktiv
- Resolutionsableitung aus Beweis aber i.a. nicht der kürzeste
- Länge abhängig von gewählter Ordnung auf Σ
- Kann sogar exponentiell länger werden als bei günstiger Ordnung

Herbrand-Modelle

Ab jetzt wieder Prädikatenlogik ...

Herbrand-Modelle

Ab jetzt wieder Prädikatenlogik . . .

Annahme

**Es gibt mindestens einen variablenfreien Term, d.h.
es gibt mindestens eine Konstante**

Herbrand-Modelle

Ab jetzt wieder Prädikatenlogik ...

Annahme

**Es gibt mindestens einen variablenfreien Term, d.h.
es gibt mindestens eine Konstante**

Definition: Herbrand-Modell

Modell

$$M = \langle U, I \rangle \qquad \text{mit}$$

- U **die Menge aller Grundterme (variablenfreie Terme)**
- $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

  für alle Funktionssymbole f, Grundterme $t_1, \ldots, t_n$

Herbrand-Modelle

Bemerkung

Für feste Signatur sind alle Herbrand-Modelle gleich

bis auf Interpretation der Prädikate

Herbrand-Modelle

Theorem

Jede erfüllbare Klauselmenge hat ein Herbrand-Modell

Herbrand-Modelle

Theorem

Jede erfüllbare Klauselmenge hat ein Herbrand-Modell

Zum Beweis

Konstruiere aus beliebigem Modell ein Herbrand-Modell vermittels

$$I^*(p)(t) = I(p)(I(t))$$

Prädikatenlogische semantische Bäume

Definition: prädikatenlogischer Semantischer Baum

Semantischer Baum für prädikatenlogische Signatur Σ ist (aussangenlogischer) semantischer Baum über

$$\Sigma_{AL} = \textbf{Menge aller Grund-Atome über } \Sigma$$

Prädikatenlogische semantische Bäume

Definition: prädikatenlogischer Semantischer Baum

Semantischer Baum für prädikatenlogische Signatur Σ ist (aussangenlogischer) semantischer Baum über

$$\Sigma_{AL} = \text{Menge aller Grund-Atome über } \Sigma$$

Definition: Fehlschlagsknoten (prädikatenlogisch)

Eine prädikatenlogische Klausel C schlägt fehl bei ν,

falls es eine Grundinstanz von C gibt,

die (aussagenlogisch) bei ν fehlschlägt

Prädikatenlogische semantische Bäume

Auch dann gilt immer noch (Beweis wie in der aussagenlogischen Variante):

Lemma

Ist Klauselmenge S über Σ unerfüllbar,

so ist jeder semantische Baum über Σ geschlossen für S

Prädikatenlogische semantische Bäume

Lemma

Ein geschlossener semantischer Baum hat einen endlichen geschlossenen Teilbaum

Prädikatenlogische semantische Bäume

Lemma

Ein geschlossener semantischer Baum hat einen endlichen geschlossenen Teilbaum

Beweis:

Mit Königs Lemma:

Jeder endlich verzweigende Baum,
in dem jeder Ast endliche Länge hat,
ist endlich.

Satz von Herbrand

Aus den beiden Lemmas folgt:

Satz von Herbrand

Ist C eine unerfüllbare (prädikatenlogische) Klauselmenge, dann gibt es eine endliche Menge von Grund-Instanzen von Klauseln in C, die unerfüllbar ist.

Satz von Herbrand

Aus den beiden Lemmas folgt:

Satz von Herbrand

Ist C eine unerfüllbare (prädikatenlogische) Klauselmenge, dann gibt es eine endliche Menge von Grund-Instanzen von Klauseln in C, die unerfüllbar ist.

Konsequenzen

- **Unerfüllbarkeit kann in endlich vielen Schritten nachgewiesen werden**

Satz von Herbrand

Aus den beiden Lemmas folgt:

Satz von Herbrand

Ist C eine unerfüllbare (prädikatenlogische) Klauselmenge, dann gibt es eine endliche Menge von Grund-Instanzen von Klauseln in C, die unerfüllbar ist.

Konsequenzen

- **Unerfüllbarkeit kann in endlich vielen Schritten nachgewiesen werden**
- **Vollständigkeit der prädikatenlogischen Resolution**

Satz von Herbrand

Aus den beiden Lemmas folgt:

Satz von Herbrand

Ist C eine unerfüllbare (prädikatenlogische) Klauselmenge, dann gibt es eine endliche Menge von Grund-Instanzen von Klauseln in C, die unerfüllbar ist.

Konsequenzen

- Unerfüllbarkeit kann in endlich vielen Schritten nachgewiesen werden
- Vollständigkeit der prädikatenlogischen Resolution
- Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik

Kompaktheitssatz

Theorem (Kompaktheitssatz)

Eine (unendliche) Menge prädikatenlogischer Formeln

ist genau dann erfüllbar,

wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist

Kompaktheitssatz

Theorem (Kompaktheitssatz)

Eine (unendliche) Menge prädikatenlogischer Formeln

ist genau dann erfüllbar,

wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist

Korollar (beispielsweise)

In Prädikatenlogik ist nicht formalisierbar:

- Endlichkeit des (Modell-)Universums
- Transitiver Abschluss einer Relation

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**
- **Geschlossener semantischer Baum**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**
- **Geschlossener semantischer Baum**
- **Alternativer Beweis für Vollständigkeit aussagenlogischer Resolution**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**
- **Geschlossener semantischer Baum**
- **Alternativer Beweis für Vollständigkeit aussagenlogischer Resolution**
- **Herbrand-Modelle**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**
- **Geschlossener semantischer Baum**
- **Alternativer Beweis für Vollständigkeit aussagenlogischer Resolution**
- **Herbrand-Modelle**
- **Prädikatenlogischer semantischer Baum**

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- Aussagenlogischer semantischer Baum
- Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten
- Geschlossener semantischer Baum
- Alternativer Beweis für Vollständigkeit aussagenlogischer Resolution
- Herbrand-Modelle
- Prädikatenlogischer semantischer Baum
- Satz von Herbrand

Zusammenfassung: Der Satz von Herbrand

- **Aussagenlogischer semantischer Baum**
- **Widerlegungsmenge, Fehlschlagsknoten, Inferenzknoten**
- **Geschlossener semantischer Baum**
- **Alternativer Beweis für Vollständigkeit aussagenlogischer Resolution**
- **Herbrand-Modelle**
- **Prädikatenlogischer semantischer Baum**
- **Satz von Herbrand**
- **Kompaktheitssatz**