Vorlesung

Logik für Informatiker

15. Prädikatenlogik

– Tableaukalkül –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$\dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$	**konjunktiv**	$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \mid \\ p \\ \mid \\ q \end{array}$

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \neg F \end{array}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ \neg F \\ | \\ * \end{array}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \longrightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

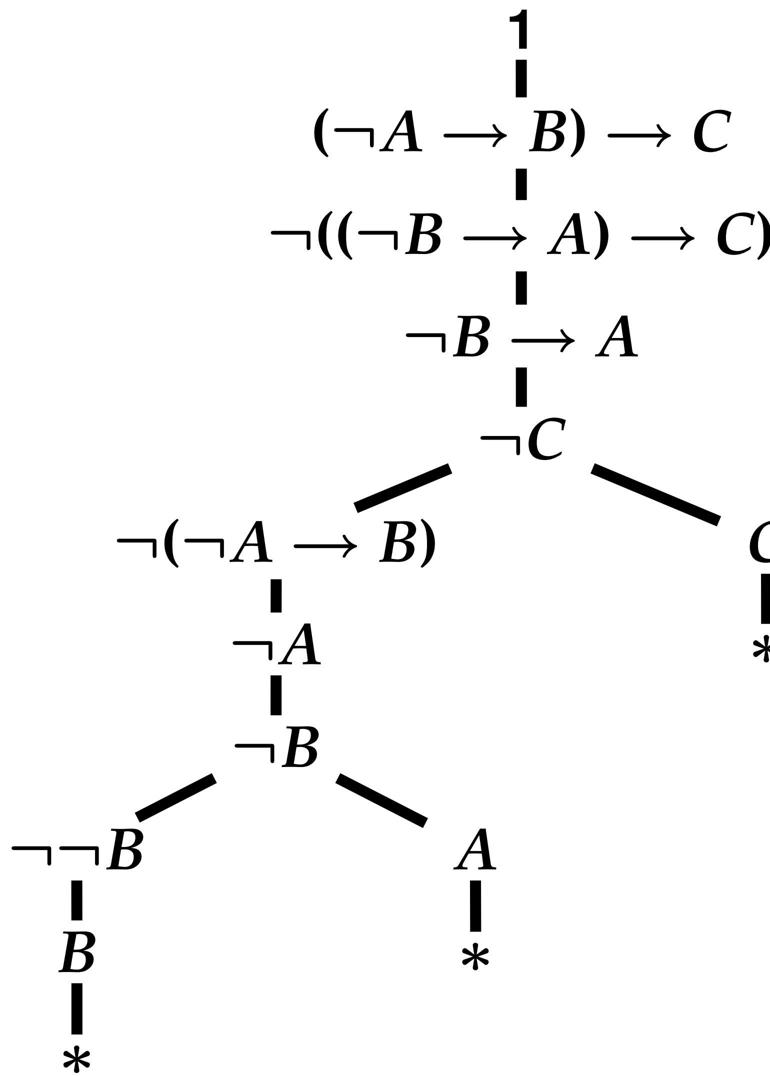
$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Beispiel

$$M \;=\; \neg(((\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow C) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow C))$$



Zusätzliche: Prädikatenlogische Tableauregeln

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(t)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(f(a)) \end{array}$$

t **bel. Grundterm**

Zusätzliche: Prädikatenlogische Tableauregeln

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(t)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(f(a)) \end{array}$$

t **bel. Grundterm**

$$\frac{\delta}{\delta_{sk}}$$

existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x p(x, y) \\ | \\ p(f(y), y) \end{array}$$

Instanzen der γ- und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x\, F(x)}{F(t)} \qquad\qquad \frac{\neg\exists\, F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der γ- und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x\, F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg\exists\, F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der δ-Regel

$$\frac{\exists x\, F(x)}{F_{sk}} \qquad \frac{\neg\forall\, F(x)}{\neg F_{sk}}$$

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch **(wie in Aussagenlogik)**

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch **(wie in Aussagenlogik)**

γ-Regel

- **hochgradig nicht-deterministisch**
- **muß für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)**
- **Grund für Nicht-Terminierung**

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muß für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

δ-Regel

- nicht-deterministisch
- muss dennoch nur einmal pro Ast und Formel angewendet werden

Prädikatenlogischer Tableaukalkül

Definition

- **Tableauast**
- **geschlossener Ast**
- **geschlossenes Tableau**
- **Tableaubeweis**
  (für die Unerfüllbarkeit einer Formelmenge)

wie in der Aussagenlogik definiert

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Wie in der Aussagenlogik

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Beispiel

Eine Aussage über Mengen

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{(1)} & S \cap Q & = & \emptyset \\
\textbf{(2)} & P & \subseteq & Q \cup R \\
\textbf{(3)} & P = \emptyset & \rightsquigarrow & Q \neq \emptyset \\
\textbf{(4)} & Q \cup R & \subseteq & S \\
\hline
\textbf{(5)} & P \cap R & \neq & \emptyset
\end{array}
$$

Beispiel

Eine Aussage über Mengen

(1)	$S \cap Q$	$=$	$\emptyset$
(2)	P	$\subseteq$	$Q \cup R$
(3)	$P = \emptyset$	$\rightsquigarrow$	$Q \neq \emptyset$
(4)	$Q \cup R$	$\subseteq$	S
(5)	$P \cap R$	$\neq$	$\emptyset$

Modellierung

$$\big(\neg\exists x(s(x) \land q(x)) \land$$
$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \lor r(x))) \land$$
$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \land$$
$$\forall x((q(x) \lor r(x)) \longrightarrow s(x))\big) \longrightarrow$$
$$\exists x(p(x) \land r(x))$$

Beispiel

Modellierung

$$\big((\neg\exists x(s(x) \land q(x)) \land$$

$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \lor r(x))) \land$$

$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \land$$

$$\forall x((q(x) \lor r(x)) \longrightarrow s(x))\big) \longrightarrow$$

$$\exists x(p(x) \land r(x))$$

Beispiel

Modellierung

$$\Big((\neg\exists x(s(x) \wedge q(x)) \wedge$$

$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \vee r(x))) \wedge$$

$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \wedge$$

$$\forall x((q(x) \vee r(x)) \longrightarrow s(x))\Big) \longrightarrow$$

$$\exists x(p(x) \wedge r(x))$$

Unerfüllbarkeit der Menge M:

$$\neg\exists x(s(x) \wedge q(x))$$

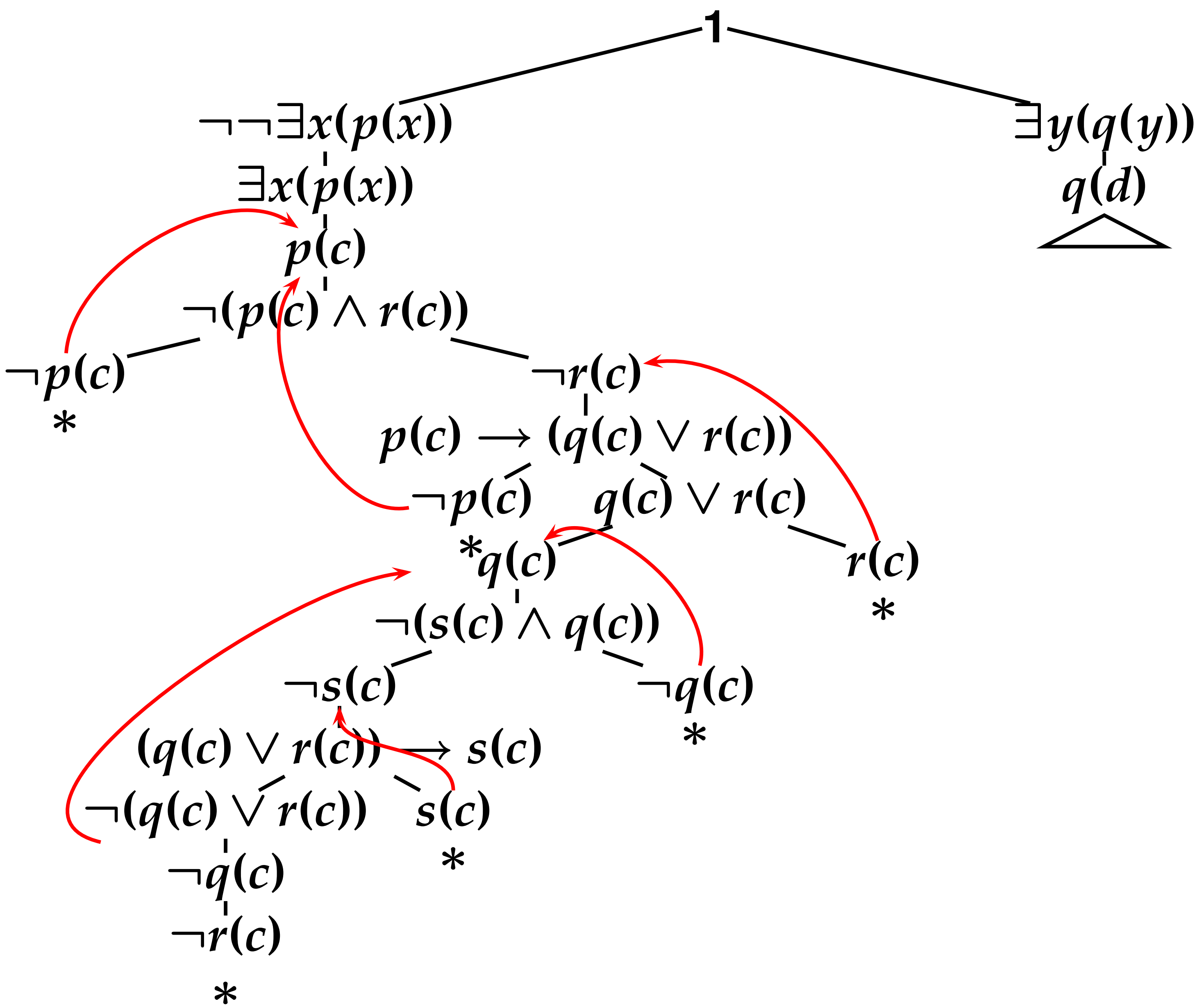
$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \vee r(x)))$$

$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y))$$

$$\forall x((q(x) \vee r(x)) \longrightarrow s(x))$$

$$\neg\exists x(p(x) \wedge r(x))$$

Beispiel



1
¬¬∃x(p(x))
∃y(q(y))
∃x(p(x))
q(d)
p(c)
¬(p(c) ∧ r(c))
¬p(c)
*
¬r(c)
p(c) → (q(c) ∨ r(c))
¬p(c)
*
q(c) ∨ r(c)
q(c)
r(c)
*
¬(s(c) ∧ q(c))
¬s(c)
¬q(c)
*
(q(c) ∨ r(c)) → s(c)
¬(q(c) ∨ r(c))
s(c)
*
¬q(c)
¬r(c)
*

Tableaus mit freien Variablen

Problem: Die richtigen Instanzen finden

Es ist sehr schwierig, zu „raten“,

welche Instanzen im Beweis nützlich sind

Tableaus mit freien Variablen

Problem: Die richtigen Instanzen finden

Es ist sehr schwierig, zu „raten“,

welche Instanzen im Beweis nützlich sind

Lösung: Tableaus mit freien Variablen

Freie Variablen (Dummies, Platzhalten)

werden „bei Bedarf“ (bei Abschluss) instantiiert

(wie bei Resolution)

Tableaus mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(y)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Tableaus mit freien Variablen

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \neg G \end{array}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(y) \\ | \\ \neg p(a) \\ | \\ \{y/a\} \end{array}$$

wobei F, G unifizierbare Literale

Tableaus mit freien Variablen

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \neg G \end{array}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(y) \\ | \\ \neg p(a) \\ | \\ \{y/a\} \end{array}$$

wobei F, G unifizierbare Literale

Allgemeinster Unifikator von F, G wird auf das ganze Tableau angewendet

Korrektheit und Vollständigkeit

Auch mit freien Variablen gilt:

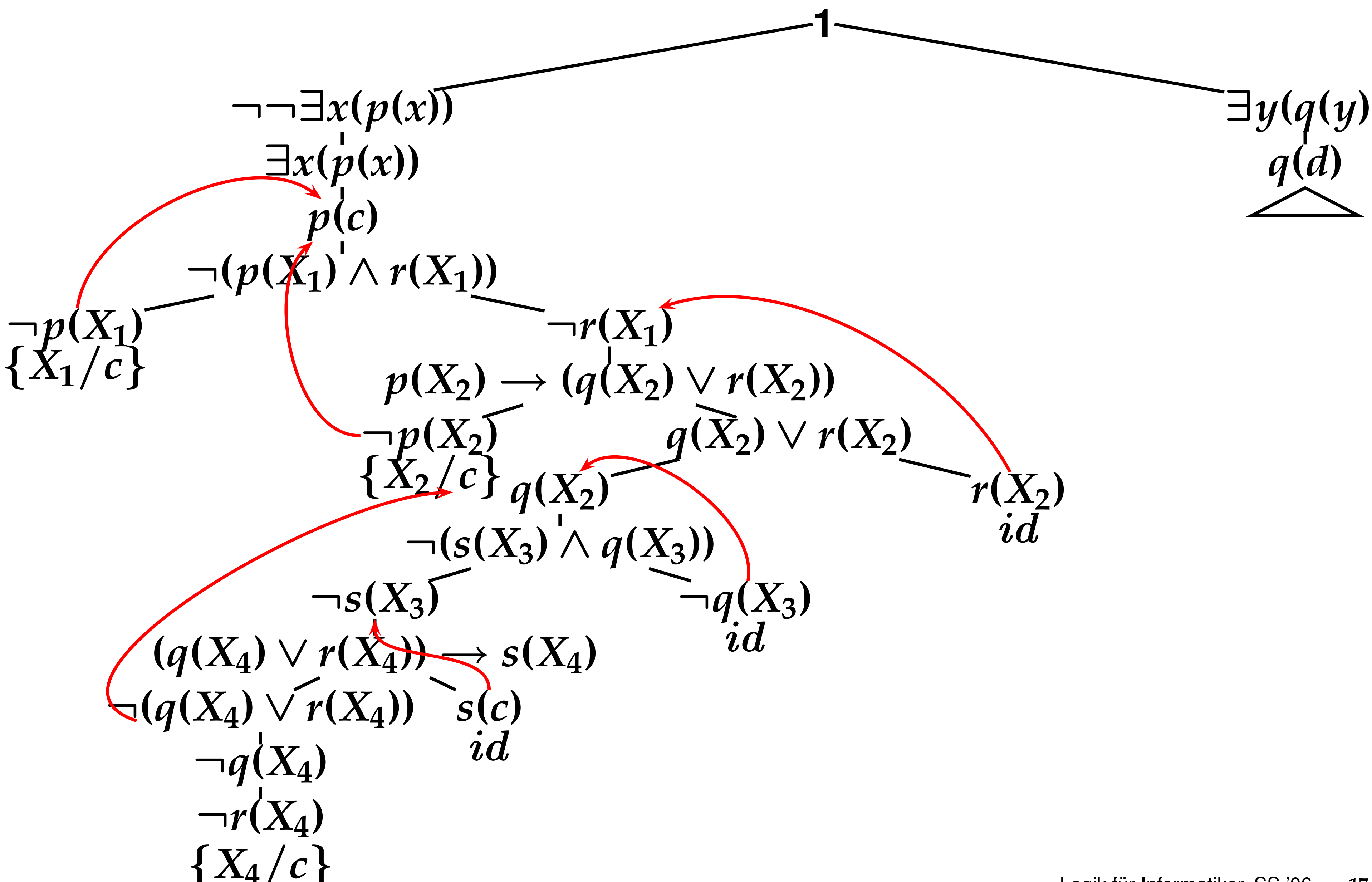
Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Beispiel mit freien Variablen



Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.

Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.

Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Tableaukonstruktion ist nicht-deterministisch: Choice points

1. **Nächster zu betrachtender Ast?**
2. **Abschluß- oder Erweiterung?**
3. **Falls Abschluß: Mit welchem Literal-Paar?**
4. **Falls Erweiterung: Mit welcher Formel?**

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairneßstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairneßstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ-Formeln beliebig oft

Kritisch: Abschluss

(Z.Zt.) nicht mit Fairneß handhabbar – erfordert Backtracking

Alternativ:
Keinen Abschluss machen, bis sich alle Äste zugleich schließen lassen

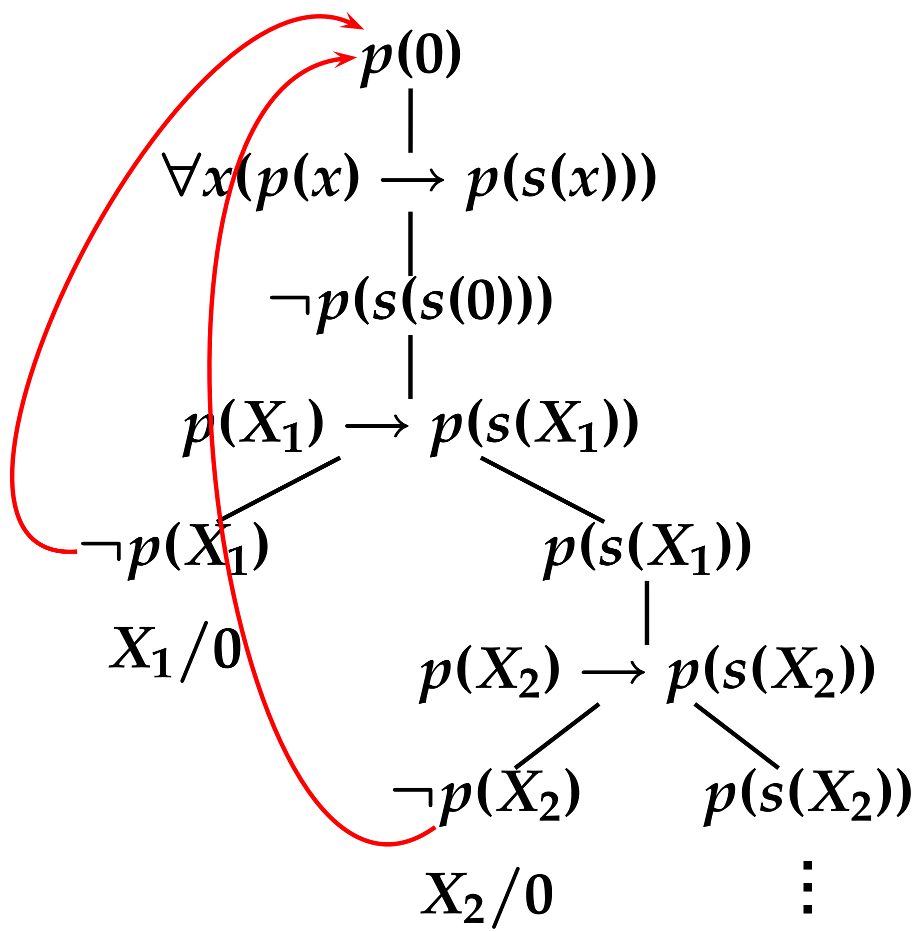
Beispiel

Unvollständigkeit durch unfaire Bevorzugung einer Formel

$$\begin{array}{c} \forall x p(x) \\ | \\ q \wedge \neg q \\ | \\ p(X_1) \\ | \\ p(X_2) \\ \vdots \end{array}$$

Beispiel

Unvollständigkeit durch Bevorzugung eines Abschlusses



Beispiel

Unvollständigkeit durch Abschluss statt Erweiterung

$$p(a)$$

$$\forall x(((p(b) \wedge p(c)) \longrightarrow p(x)) \longrightarrow \neg(q(x) \longrightarrow (q(b) \vee q(c))))$$

$$\neg q(d)$$

$$((p(b) \wedge p(c)) \longrightarrow p(X)) \longrightarrow \neg(q(X) \longrightarrow (q(b) \vee q(c)))$$

$$\neg((p(b) \wedge p(c)) \longrightarrow p(X)) \qquad \neg(q(X) \longrightarrow (q(b) \vee q(c)))$$

$$p(b) \wedge p(c) \qquad q(X)$$

$$\neg p(X) \qquad \neg(q(b) \vee q(c))$$

Prädikatenlogische Klauseltableaus

Konstruktion eines Klauseltableaus für eine Klauselmenge S

- **Abschlussregel wie zuvor**

Prädikatenlogische Klauseltableaus

Konstruktion eines Klauseltableaus für eine Klauselmenge S

- **Abschlussregel wie zuvor**
- **Keine α-, keine δ-Regel**

Prädikatenlogische Klauseltableaus

Konstruktion eines Klauseltableaus für eine Klauselmenge S

- **Abschlussregel wie zuvor**
- **Keine α-, keine δ-Regel**
- **γ- und β-Regel zusammengefasst:**

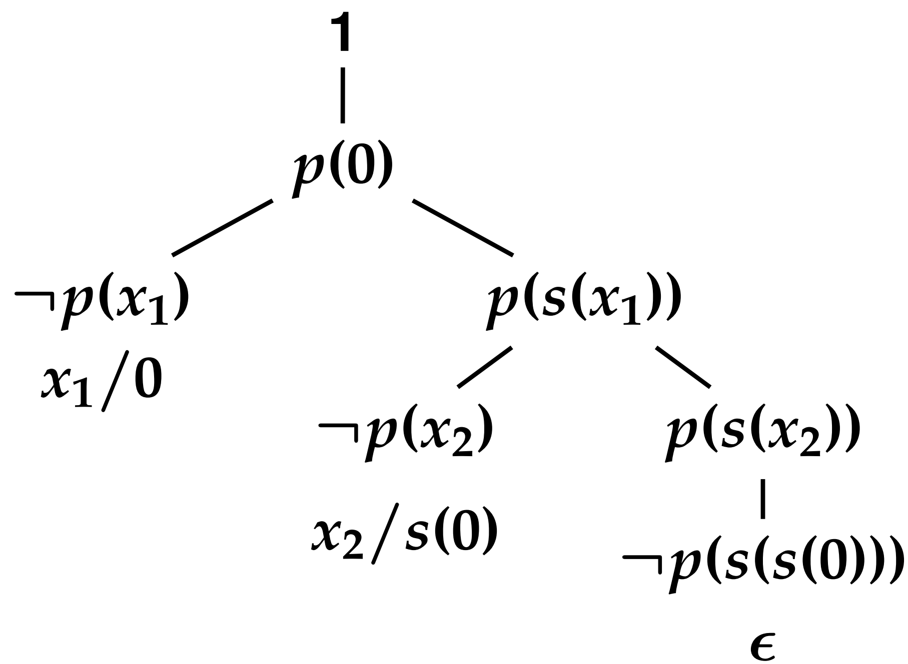
  – B **ein Ast**
  – $C = \{l_1, \ldots, l_n\}$ **eine Klausel in** S
  – $C' = C\nu = \{l'_1, \ldots, l'_n\}$ **aus** C **durch Variablenumbenennung**

  dann kann B **erweitert werden,**
  indem n **Blätter mit** $l'_1, \ldots, l'_n$ **angehängt werden:**

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\{l_1, \ldots, l_n\}} \\ \hline l'_1 & \ldots & l'_n \end{array}$$

Beispiel

$$S = \{\{p(0)\}, \{\neg p(x), p(s(x))\}, \{\neg p(s(s(0)))\}\}$$



Zusammenfassung

- **γ- und δ-Regel**

Zusammenfassung

- **γ- und δ-Regel**
- **Determinismus der Regeln**

Zusammenfassung

- γ- und δ-Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaus mit freien Variablen
  neue γ- und neue Abschlussregel

Zusammenfassung

- γ- und δ-Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaus mit freien Variablen
  neue γ- und neue Abschlussregel
- Beweissuchprozedur

Zusammenfassung

- γ- und δ-Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaus mit freien Variablen
  neue γ- und neue Abschlussregel
- Beweissuchprozedur
- Prädikatenlogische Klauseltableaus