Vorlesung

Logik für Informatiker

15. Prädikatenlogik

– Tableaukalkül –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Zur Erinnerung: Aussagenlogische Tableauregeln

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \neg F \end{array}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ \neg F \\ | \\ * \end{array}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α- und β-Regel

Instanzen der α-Regel

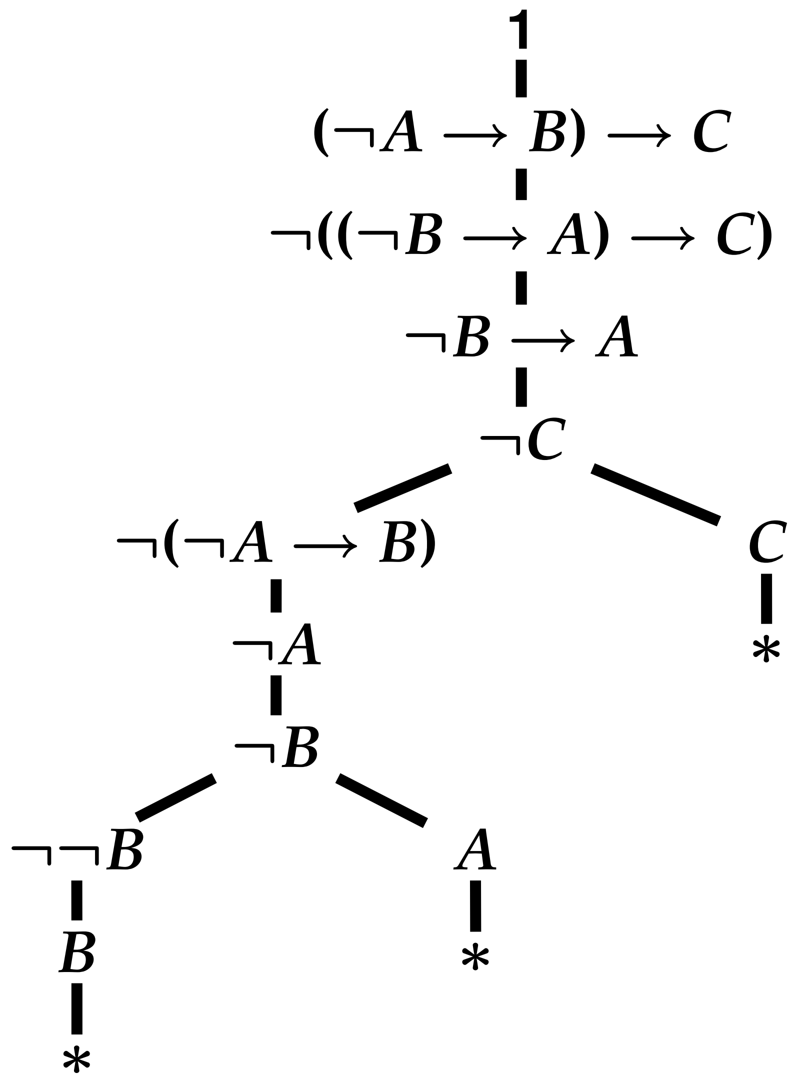
$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Beispiel

$$M \;=\; \neg(((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C))$$



Zusätzliche: Prädikatenlogische Tableauregeln

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(t)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(f(a)) \end{array}$$

t **bel. Grundterm**

Zusätzliche: Prädikatenlogische Tableauregeln

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(t)}$$

t **bel. Grundterm**

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(f(a)) \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_{sk}}$$

existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x p(x, y) \\ | \\ p(f(y), y) \end{array}$$

Instanzen der γ- und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x\, F(x)}{F(t)} \qquad\qquad \frac{\neg\exists\, F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der γ- und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x\, F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg\exists\, F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der δ-Regel

$$\frac{\exists x\, F(x)}{F_{sk}} \qquad \frac{\neg\forall\, F(x)}{\neg F_{sk}}$$

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch **(wie in Aussagenlogik)**

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- **hochgradig nicht-deterministisch**
- **muß für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)**
- **Grund für Nicht-Terminierung**

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- **hochgradig nicht-deterministisch**
- **muß für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)**
- **Grund für Nicht-Terminierung**

δ-Regel

- **nicht-deterministisch**
- **muss dennoch nur einmal pro Ast und Formel angewendet werden**

Prädikatenlogischer Tableaukalkül

Definition

- Tableauast
- geschlossener Ast
- geschlossenes Tableau
- Tableaubeweis
  (für die Unerfüllbarkeit einer Formelmenge)

wie in der Aussagenlogik definiert

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Wie in der Aussagenlogik

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Beispiel

Eine Aussage über Mengen

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{(1)} & S \cap Q & = & \emptyset \\
\textbf{(2)} & P & \subseteq & Q \cup R \\
\textbf{(3)} & P = \emptyset & \rightsquigarrow & Q \neq \emptyset \\
\textbf{(4)} & Q \cup R & \subseteq & S \\
\hline
\textbf{(5)} & P \cap R & \neq & \emptyset
\end{array}
$$

Beispiel

Eine Aussage über Mengen

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{(1)} & S \cap Q & = & \emptyset \\
\textbf{(2)} & P & \subseteq & Q \cup R \\
\textbf{(3)} & P = \emptyset & \leadsto & Q \neq \emptyset \\
\textbf{(4)} & Q \cup R & \subseteq & S \\
\hline
\textbf{(5)} & P \cap R & \neq & \emptyset
\end{array}
$$

Modellierung

$$
\begin{array}{l}
\big(\neg\exists x(s(x) \land q(x)) \land \\
\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \lor r(x))) \land \\
\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \land \\
\forall x((q(x) \lor r(x)) \longrightarrow s(x))\big) \longrightarrow \\
\exists x(p(x) \land r(x))
\end{array}
$$

Beispiel

Modellierung

$$\big((\neg\exists x(s(x) \wedge q(x)) \wedge$$

$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \vee r(x))) \wedge$$

$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \wedge$$

$$\forall x((q(x) \vee r(x)) \longrightarrow s(x))\big) \longrightarrow$$

$$\exists x(p(x) \wedge r(x))$$

Beispiel

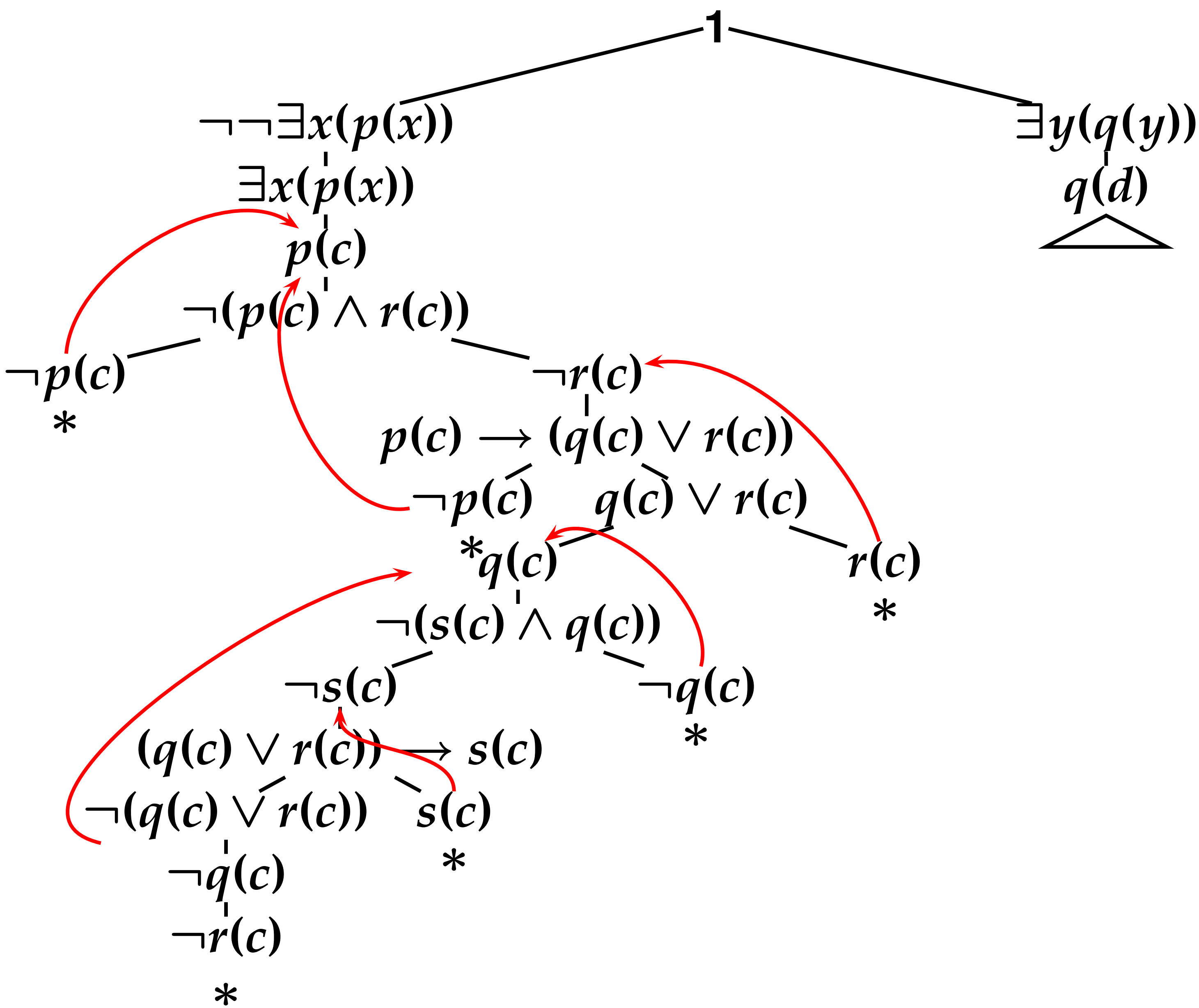
Modellierung

$$\big((\neg\exists x(s(x) \land q(x)) \land$$
$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \lor r(x))) \land$$
$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y)) \land$$
$$\forall x((q(x) \lor r(x)) \longrightarrow s(x))\big) \longrightarrow$$
$$\exists x(p(x) \land r(x))$$

Unerfüllbarkeit der Menge M:

$$\neg\exists x(s(x) \land q(x))$$
$$\forall x(p(x) \longrightarrow (q(x) \lor r(x)))$$
$$\neg\exists x(p(x)) \longrightarrow \exists y(q(y))$$
$$\forall x((q(x) \lor r(x)) \longrightarrow s(x))$$
$$\neg\exists x(p(x) \land r(x))$$

Beispiel



1
¬¬∃x(p(x))
∃y(q(y))
∃x(p(x))
q(d)
p(c)
¬(p(c) ∧ r(c))
¬p(c)
*
¬r(c)
p(c) ⟶ (q(c) ∨ r(c))
¬p(c)
q(c) ∨ r(c)
*
q(c)
r(c)
*
¬(s(c) ∧ q(c))
¬s(c)
¬q(c)
*
(q(c) ∨ r(c)) ⟶ s(c)
¬(q(c) ∨ r(c))
s(c)
*
¬q(c)
¬r(c)
*