Musterlösung der Klausur zur Vorlesung *Logik für Informatiker*

Bernhard Beckert · Christoph Gladisch · Claudia Obermaier
Arbeitsgruppe Künstliche Intelligenz
Fachbereich Informatik, Universität Koblenz-Landau

10.08.2006

Name:
Vorname:
Martikelnummer:
e-Mail:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt	Bestanden
Punkte									

① **(12 Punkte (5+4+3))**

(a) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

	richtig	falsch
Es gibt eine erfüllbare Formel, deren Negat unerfüllbar ist.	x	
Es gibt eine erfüllbare Formel, deren Negat erfüllbar ist.	x	
Verknüpft man eine unerfüllbare Formel disjunktiv mit einer allgemeingültigen Formel, so ist das Ergebnis erfüllbar.	x	
Die Erfüllbarkeit von Hornformeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.	x	
Aus den Klauseln $\{C, \neg B\}$ und $\{\neg C, B\}$ lässt sich mit aussagenlogischer Resolution die leere Klausel herleiten.		x

(b) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen!
(Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Hinweis:

- Bei F und G handelt es sich um aussagenlogische Formeln, bei M_1 und M_2 um Mengen aussagenlogischer Formeln.

	richtig	falsch
Wenn $F \rightarrow G \models F$, dann $F \models G$.		x
Wenn M_1 erfüllbar und M_2 erfüllbar, dann ist $M_1 \cup M_2$ erfüllbar.		x

(c) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

	richtig	falsch
Für jede prädikatenlogische Formel H gilt: H ist allgemeingültig oder das Negat von H ist erfüllbar.	x	
Wenn eine prädikatenlogische Formel erfüllbar ist, dann ist jede ihrer Teilformeln erfüllbar.		x
Es gibt eine prädikatenlogische Interpretation, in der alle prädikatenlogischen Formeln wahr sind.		x

② **(10 Punkte)**

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen!
(Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe vergeben.)

Hinweis:

- PL1 steht für Prädikatenlogik erster Ordnung; auf diese beziehen sich auch die Begriffe erfüllbar, allgemeingültig und unerfüllbar.
- Eine allgemeingültige Formel ist auch erfüllbar.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$\exists n \exists x (f^n(x) \rightarrow f(x))$	x			
$p(c) \rightarrow \forall x(p(x))$		x		
$p(c) \rightarrow \exists x(p(x))$		x	x	
$\forall x \exists f (p(f(x), x) \vee \neg p(f(x), x))$	x			
$\exists x (p(x) \leftrightarrow (q(x) \leftrightarrow (p(x) \leftrightarrow \neg q(x))))$				x

③ **Aussagenlogik (15 Punkte)**

Gegeben seien drei aussagenlogische Formeln G, E und U. Wobei G allgemeingültig ist, E erfüllbar, aber nicht allgemeingültig und U unerfüllbar ist.

Für jede falsche Antwort werden 3 Punkte abgezogen!
(Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Klassifizieren Sie die folgenden Formeln:

Hinweis:

- Jede Formel hat genau eine der genannten Eigenschaften.

	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$\neg G$			x
$G \rightarrow U$			x
$E \rightarrow G$	x		
$E \leftrightarrow U$		x	
$(E \vee G) \wedge (E \vee U)$		x	

④ **Tableaukalkül (17 Punkte)**

Gegeben ist die prädikatenlogische Formel

$$F = \Big(\forall x \big(p(x) \to \neg p(f(x))\big) \land \exists x \big(\neg p(f(x)) \to p(x)\big)\Big) \to \exists x \big(p(x) \land \neg p(f(x))\big)$$

Zeigen Sie mit dem prädikatenlogischen Tableaukalkül, dass F allgemeingültig ist. Vervollständigen Sie hierfür das unten angefangene Tableau.

Lösung:

1

$\forall x(p(x) \to \neg p(f(x))) \wedge \exists x(\neg p(f(x)) \to p(x))$

$\neg\exists x(p(x) \wedge \neg p(f(x)))$

$\forall x(p(x) \to \neg p(f(x)))$

$\exists x(\neg p(f(x)) \to p(x))$

$\neg p(f(c)) \to p(c)$

- $\neg\neg p(f(c))$
  - $p(f(c))$
  - $p(X_1) \to \neg p(f(X_1))$
    - $\neg p(X_1)$
      - $\star$
      - $X_1/f(c)$
    - $\neg p(f(X_1))$
      - $\neg(p(X_2) \wedge \neg p(f(X_2)))$
        - $\neg p(X_2)$
          - $\star$
          - $X_2/f(c)$
        - $\neg\neg p(f(X_2))$
          - $p(f(X_2))$
          - $\star$
- $p(c)$
  - $\neg(p(X_3) \wedge \neg p(f(X_3)))$
    - $\neg p(X_3)$
      - $\star$
      - X_3/c
    - $\neg\neg p(f(X_3))$
      - $p(f(X_3))$
      - $p(X_4) \to \neg p(f(X_4))$
        - $\neg p(X_4)$
          - $\star$
          - X_4/c
        - $\neg p(f(X_4))$
          - $\star$

⑤ **Resolution (15 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Klauselmenge:

$$\begin{aligned}\{&\{p(x, g(y)),\ q(y, x)\},\\ &\{\neg q(f(u), f(u)),\ p(f(u), g(f(u)))\},\\ &\{\neg p(u, g(u)),\ r(u)\},\\ &\{\neg r(f(f(z)))\}\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, dass diese Klausemenge unerfüllbar ist. Geben Sie dabei alle verwendeten Unifikatoren und Umbenennungen an.

Hinweis:

- x, y, z und u bezeichnen Variablen,
- p und q sind Prädikate und
- f und g bezeichnen Funktionssymbole.

Lösung:

(1) $\{p(x, g(y)),\ q(y, x)\}$

(2) $\{\neg q(f(u), f(u)),\ p(f(u), g(f(u)))\}$

(3) $\{\neg p(u, g(u)),\ r(u)\}$

(4) $\{\neg r(f(f(z)))\}$

(5) $\{\neg p(f(f(z)), g(f(f(z)))\}$ (aus (3) und (4) mit $\sigma = \{u|f(f(z))\}$)

(6) $\{p(f(u), g(f(u)))\}$ (aus (1) und (2) mit $\sigma = \{y|f(u), x|f(u)\}$)

(7) $\square$ (aus (5) und (6) mit $\sigma = \{u|f(z)\}$)

⑥ (12 Punkte)

Bei den Teilaufgaben (a) und (b) gilt: c, d sind Konstanten, f, g, h, k, m sind Funktionssymbole und u, v, w, x, y, z sind Variablen.

(a) Geben Sie für die folgenden Paare S und T von Termen einen allgemeinsten Unifikator μ an (als *eine* Substitution und nicht als eine Verkettung von Substitutionen). Falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt, begründen Sie!
Falls es einen allgemeinsten Unifikator gibt, geben Sie das Ergebnis der Unifikation an.

i. $S = m(f(g(x), z), y)$
$T = m(f(y, h(y, c)), x)$

Lösung:
Nicht unifizierbar!
Der Algorithmus liefert eine Gleichungsmenge, in der $x = g(x)$ enthalten ist. Das liefert Fail, da x in $g(x)$ vorkommt.

ii. $S = h(f(x, y), f(z, u))$
$T = h(f(c, g(x, z)), f(c, w))$

Lösung:
$\mu = \{x/c, y/g(c, c), z/c, u/w\}$
Ergebnis der Unifikation: $h(f(c, g(c, c)), f(c, w))$

iii. $S = f(x, y, z)$
$T = f(g(a, y), h(x), a)$

Lösung:
Nicht unifizierbar!
Der Algorithmus liefert eine Gleichungsmenge, in der $x = g(a, h(x))$ enthalten ist. Das liefert Fail, da x in $x = g(a, h(x))$ vorkommt. (alternativ kann auch $y = h(g(a, y))$ entstehen)

(b) Zeigen Sie, dass die Substitution

$$\sigma = \{u|f(c), w|f(c), v|g(d), y|d, z|d\}$$

kein allgemeinster Unifikator der folgenden Terme ist:

$$k(f(y), w, g(z))$$
$$k(u, u, v)$$

Lösung:
σ ist gar kein Unifikator der beiden Terme, denn

$$((f(y), w, g(z)))\sigma = k(f(f(c)), f(c), g(d)) \neq k(f(c), f(c), g(d)) = (k(u, u, v))\sigma$$

⑦ **Formalisierung (9 Punkte ((2+3)+(2+2))** Verwenden sie in dieser Aufgabe nur die folgenden Prädikatensymbole:

- $pr(x)$ - x ist ein Problem
- $loe(x, y)$ - die Lösung von x ist y
- $me(x)$ - x ist ein Mensch
- $ver(x, y)$ - x versteht y

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

1. Jedes Problem hat eine Lösung, die kein Mensch versteht.
   Lösung:
   $\forall x(pr(x) \rightarrow \exists y(lsg(x, y) \wedge \neg(\exists z(me(z) \wedge ver(z, y)))))$
2. Wenn jedes Problem eine Lösung hat, dann gibt es keinen Menschen, der jedes Problem versteht.
   Lösung:
   $[\forall x(pr(x) \rightarrow \exists y lsg(x, y))] \rightarrow [\neg(\exists z(me(z) \wedge \forall v(pr(v) \rightarrow ver(z, v))))]$

(b)

1. Formalisieren Sie die folgende Aussage in Prädikatenlogik:
   Für jedes Problem gibt es eine Lösung.
   Lösung:
   $\forall x(pr(x) \rightarrow (\exists y loe(x, y))$
2. Übersetzen Sie die folgende Formel in natürliche Sprache und erklären Sie kurz den Unterschied zur Aussage (b)1.:

$$\exists x(\forall y(pr(y) \rightarrow loe(y, x)))$$

   Lösung:
   Es gibt eine Lösung, die eine Lösung für alle Probleme ist.
   d.h. *eine* Lösung l löst alle möglichen Probleme. In (b)1. hingegen wird nur ausgesagt, dass alle Probleme eine Lösung haben. Hier können die einzelnen Probleme verschiedene Lösungen haben.