Lösungen zu den Aufgaben der Lösungsblätter 1-4.

Lösung zur Aufgabe 1

a)

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

b)

Wir führen für jede Tellenposition (i, j)des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine boolsche Variable $D^k_{i,j}$ ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht. Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

Beispiel: $D^9_{9,1}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

$$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^2_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^3_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^4_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),$$
$$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^6_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^7_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^8_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),$$
$$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^3{}_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^4_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^5_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),$$
$$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^7_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^8_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^9_{1,1}), \neg(D^3_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),$$

usw...

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leqslant i, j, s, t \leqslant 9$ mit $s < t$. Das ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Lösung zur Aufgabe 2

1 Gerade hat höchstens 0 Schnittpunkte,
2 Geraden haben höchstens 1 Schnittpunkte,
3 Geraden haben höchstens 3 Schnittpunkte,
4 Geraden haben höchstens 6 Schnittpunkte,
5 Geraden haben höchstens 10 Schnittpunkte,

Ist $A(n)$ die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Geraden, so

n	1	2	3	4	5	...
$A(n)$	0	$0+1=\mathbf{1}$	$\mathbf{1}+2=\mathbf{3}$	$\mathbf{3}+3=\mathbf{6}$	$\mathbf{6}+4$	

Rekursive Formel also:

$$A(n+1) = A(n) + n$$

oder

$$A(n) = A(n-1) + n - 1$$

D.h. die $(n+1)$te Gerade bringt höchstens n neue Schnittpunkte. Noch anders notiert

n	1	2	3	4	5	...
$A(n)$	0	$0+1$	$0+1+2$	$0+1+2+3$	$0+1+2+3+4$	
		1	3	6	10	

Also

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k \;\text{ oder }\; A(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Beweis: $n+1$ Geraden haben höchstens $\sum_{k=0}^{(n+1)-1} k$ Schnittpunkte

Ind.Anf: Eine Gerade hat keinen Schnittpunkt $A(1) = 0$ gilt.

Ind.Annahme: $A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k$ gilt

Ind.Schritt: Zu zeigen: $A(n+1)$ folgt aus der Gültigkeit, dass $A(n)$ die maximale Anzahl der Schnittpunkte für n Geraden liefert.

$$\begin{aligned}
A(n+1) &= ? \\
&= A(n) + n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k + n \\
&= \underbrace{\overbrace{0+1+2+\ldots+(n-1)}^{\sum_{k=0}^{n-1} k} + n}_{\sum_{k=0}^{n} k} \\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)-1} k
\end{aligned}$$

Also folgt $A(n+1) = \sum_{k=0}^{(n+1)-1} k$ aus $A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k$ für alle n was zu zeigen war. ■

Wer die Formel $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ angewendet hat, der zeigt nach gleichem Muster:

Ind.Anfang: $A(1) = 0$ gilt

Ind.Annahme: $A(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ gilt

Ind.Schritt: Zu zeigen: $A(n+1)$ folgt aus der Gültigkeit, dass $A(n)$ die maximale Anzahl der Schnittpunkte für n Geraden liefert.

$$\begin{aligned}
A(n+1) &= ? \\
&= A(n) + n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 + 1n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Also folgt $A(n+1)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ aus $A(n)=\frac{n(n-1)}{2}$ was zu zeigen war. ■

Lösung zur Aufgabe 3

$(A,\leqslant)$ ist noethersch gdw. $(A,\leqslant)$ ist wohlfundiert.

$\Leftarrow$:

Sei A wohlfundiert und $B\subset A$ eine Teilmenge von A, dann bilden $b_1, b_2 ... \in B$ eine absteigende abzählbare Kette in A. Jedes B besitzt per Definition also ein minimales Element b_n sodass gilt: $b_1 < .... < b_n$.

$\Rightarrow$:

Sei jetzt A noethersch und B eine nichtleere Teilmente von A. Ist b_1 nicht minimal in B, dann bigt es ein $b_2\in B$ mit $b_2 < b_1$. Ist b_2 nicht minimal in B, dann findet man ein $b_3\in B$ mit $b_3 < b_2$ usw. Entweder bricht diese Suche mit einem $b_m \in B$ ab, das minimal in B ist, oder man bekommt in B eine unendliche, absteigende abzählbare Kette: $b_1 > b_2 > b_3 > ...$, was ein Widerspruch zu A sei noethersch ist. Also gibt es in B ein minimales Element.

Lösung zur Aufgabe 4

a)

Benennen der Aussagen:

b: Es gibt Brot zur Mahlzeit.
d: Es gibt Dessert zur Mahlzeit.
s: Es gibt Suppe zur Mahlzeit.

Die Forderungen lauten damit:

A: $\neg d \rightarrow b \equiv \neg(\neg d)\vee b \equiv d\vee b$
B: $(b\wedge d)\rightarrow \neg s \equiv \neg(b\wedge d)\vee \neg s$
C: $(s\vee \neg d)\rightarrow \neg b \equiv \neg(s\vee\neg d)\vee\neg b$

Gesamtbedingung also:

$A\wedge B\wedge C \equiv (d\vee b)\wedge(\neg(b\wedge d)\vee\neg s)\wedge(\neg(s\vee\neg d)\vee\neg b)$

b)

0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

b	d	s	$A\wedge B\wedge C$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$d\wedge\neg b\wedge\neg s$
1	0	0	1	$d\wedge b\wedge\neg s$
1	0	1	1	$d\wedge\neg b\wedge s$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

unter den Belegungen im schattierten Bereich ist $A \wedge B \wedge C$ erfüllbar.

c)

Dessert ist zu jeder Mahlzeit zu reichen, Suppe oder Brot können serviert werden, aber nicht gleichzeitig.

Lösung zur Aufgabe 5

- $(P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3)$
- $(P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$
- $(P_1 \vee P_2 \vee P_3)$

Lösung zur Aufgabe 6

A	B	C	$B \wedge \neg C$	$A \vee (B \wedge \neg C)$	$B \rightarrow C$	$B \vee \neg A$	M	$A \rightarrow B$
0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1

M ist erfüllbar.

$M \vDash (A \rightarrow B)$ gilt.

Lösung zur Aufgabe 7

a) $\neg(\mathrm{ME} \vee \mathrm{VF}) \equiv \neg\mathrm{ME} \wedge \neg\mathrm{VF}$

b) $\neg(\mathrm{Ph} \wedge \neg\mathrm{Ma}) \equiv \neg\mathrm{Ph} \vee \mathrm{Ma}$

c) $\neg(\mathrm{LSi} \wedge \mathrm{PSt}) \equiv \neg\mathrm{LSi} \vee \neg\mathrm{PSt}$

d) $\neg(\neg K \vee R) \equiv K \wedge \neg R$

Lösung zur Aufgabe 8

a)

a	b	c	$(a \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow b$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Disjunktive Form:

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

Konjunktive Form:

$(\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

Klauselmenge:

$\{\{\neg a, b, c\}, \{\neg a, b, \neg c\}\}$

b)

$$
\begin{aligned}
& ((A \rightarrow B) \wedge (B - C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow C) \\
\equiv\ & \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (A \vee C) \\
\equiv\ & \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg(B \vee C) \vee (A \vee C) \\
\equiv\ & (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee A \vee C \text{ ist DNF} \\
\equiv\ & ((A \wedge \neg B) \vee A) \vee (C \vee (B \wedge \neg C)) \\
\equiv\ & B \wedge (A \vee C) \vee A \vee C \\
\equiv\ & B \wedge (A \vee C) \text{ ist KNF}
\end{aligned}
$$

Lösung zur Aufgabe 9

a)

$$
\begin{aligned}
& p \vee \neg(p \wedge q) \ \text{ DeMorgan} \\
\equiv\ & p \vee (\neg p \vee \neg q) \ \text{ Assoziativ} \\
\equiv\ & p \vee \neg p \vee \neg q \text{ Tertium non datur} \\
\equiv\ & 1 \vee \neg q \\
\equiv\ & 1
\end{aligned}
$$

stets wahr, also Tautologie.

$$
\begin{aligned}
& (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q) \text{ Assoziativ} \\
\equiv\ & (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q \text{ Kommutativ} \\
\equiv\ & (p \vee \neg q) \wedge q \wedge \neg p \text{ Assoziativ} \\
\equiv\ & ((p \vee \neg q) \wedge q) \wedge \neg p \ \text{ Distributiv} \\
\equiv\ & ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)) \wedge \neg p \text{ Unerfüllbarkeitsregel} \\
\equiv\ & ((p \wedge q) \vee 0) \wedge \neg p \\
\equiv\ & (p \wedge q) \wedge \neg p \text{ Assoziativ} \\
\equiv\ & p \wedge q \wedge \neg p \text{ Kommutativ} \\
\equiv\ & q \wedge p \wedge \neg p \text{ Unerfüllbarkeitsregel} \\
\equiv\ & q \wedge 0 \\
\equiv\ & 0
\end{aligned}
$$

stets falsch, also unerfüllbar

Lösung zur Aufgabe 10

a)

F
1
0

erfüllbar

G
1
0

erfüllbar

F	G	$F \vee \neg G$
0	0	1
0	1	0
1	0	..
..	..	..

falsifizierbar.

$F \vee \neg G$ ist **nicht immer** eine Tautologie

b)

B ist nicht immer erfüllbar. A könnte manchmal 1 und manchmal 0 sein. Setzen wir $B \equiv 0$, dann ist $A \rightarrow B \equiv 1$ (erfüllbar), wenn $A \equiv 0$.

c)

Wenn F eine Tautologie ($F \equiv 1$) ist, dann gilt $A \vDash F$, denn wegen dem Deduktionstheorem gilt:

$M \vDash F$ gdw. $\vDash M \rightarrow F$ gdw. $\vDash M \rightarrow 1$ gdw $\vDash 1$

d)

G unerfüllbar ($G \equiv 0$) und $F \vDash G$. Benutze das Deduktionstheorem:

$F \vDash G$ gdw. $F \vDash 0$ gdw. $\vDash F \rightarrow 0$ gdw. $\vDash \neg F \vee 0$ gdw. $\vDash \neg F$ d.h. $F \equiv 0$ und somit $F \vee G \equiv 0$.

Lösung zur Aufgabe 11

$A = (q \rightarrow r) \wedge s \equiv (\neg q \vee r) \wedge s \equiv X \wedge s$

$B = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r) \equiv (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r) \equiv \neg q \vee r \vee \neg p \equiv X \vee \neg p$

Wobei X eine Abkürzung für $\neg q \vee r$ ist.

X	s	p	$X \wedge s$	$X \vee \neg p$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Es gilt $A \vDash B$

Suche eine Formel Y, sodass (1) $X \wedge s \vDash Y$ und $Y \vDash X \vee \neg p$ und (2) Y enthält Atom die in $X \wedge s$ und $X \vee \neg p$ enthalten sind. Eine Methode, mit der die erste Bedingung erfüllt werden kann, ist durch Benutzung einer Wahrheitstabelle.

X	s	p	$X \wedge s$	Y	$X \vee \neg p$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Daraus folgt $Y \equiv X \equiv \neg q \vee r$, womit auch die zweite Bedingung (zufälliger Weise) erfüllt ist.

Um jedoch auch die zweite Bedingung allgemein zu garantieren gehe wie folgt vor:

1. Sammle alle atomare Formeln, welche in A aber nicht in B vorkommen in der Menge G. Hier also G=$\{s\}$

2. Bilde neue Formeln aus A, indem alle Vorkommen der atomaren Formeln $s \in G$ in A durch alle möglichen Kombinationen aus $\{1,0\}$ ersetzt werden. Hier also $((\neg p \vee r) \wedge 0)$ und $((\neg p \vee r) \wedge 1)$

3. Die Craig-Interpolante entsteht durch die disjunktive Verknüpfung der resultierenden Formeln. Hier: $((\neg p \vee r) \wedge 0) \vee ((\neg p \vee r) \wedge 1)$

Durch Vereinfachung erhält man $Y \equiv \neg q \vee r$

Lösung zur Aufgabe 12

Hornformel: höchstens eine atomare Formel als Conclusio der Implikationen.

Im folgenden werden alle Implikation implizit konjunktiv verknüpft.

a) keine Hornformel

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow A \vee B \vee C \\ C &\rightarrow A \\ A &\rightarrow B \\ B &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

b) keine Hornformel

$$\begin{aligned} P &\rightarrow S \vee Q \\ P \wedge R &\rightarrow S \end{aligned}$$

c) Hornformel

$$A \rightarrow A$$

d) Hornformel

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow A \\ A &\rightarrow B \\ B \wedge C &\rightarrow D \\ E &\rightarrow 0 \\ A \wedge C &\rightarrow 0 \\ 1 &\rightarrow D \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 13

Im folgenden werden alle Implikation implizit konjunktiv verknüpft. Die Nummern geben die Reihenfolge der Markierungen an.

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow A^{(1)} \\ B &\rightarrow 0 \\ 1 &\rightarrow C^{(1)} \\ 1 &\rightarrow D^{(1)} \\ A^{(1)} &\rightarrow E^{(2)} \\ E^{(2)} \wedge F^{(3)} &\rightarrow D^{(4)} \\ E^{(2)} &\rightarrow F^{(3)} \end{aligned}$$

B und damit 0 wurde nicht markiert also ist die Formel G erfüllbar.

Lösung zur Aufgabe 14

$\mathrm{Res}^0:$
1: [] $\{A\}$
2: [] $\{B\}$
3: [] $\{\neg A, C\}$
4: [] $\{B, \neg C, \neg D\}$
5: [] $\{\neg C, D\}$
6: [] $\{\neg D\}$
$\mathrm{Res}^1 = \mathrm{Res}^0 \cup:$
7: [1,3] $\{C\}$
8: [2,4] $\{\neg C, \neg D\}$
9: [3,4] $\{\neg A, B, \neg D\}$
10:[3,5] $\{\neg A, D\}$
11:[4,5] $\{B, \neg C, \}$
12:[5,6] $\{\neg C\}$

$\mathrm{Res}^2 = \mathrm{Res}^1 \cup:$
13: [3,**8**] $\{\neg \mathrm{A}, \neg \mathrm{D}\}$
14: [4,7] $\{B, \neg D\}$
15: [4,10] $\{B, \neg C, \neg A\}$
16: [5,7] $\{D\}$
17: [5,8] $\{\neg C\}$
18: [6,10] $\{\neg A\}$
19: [7,8] $\{\neg D\}$
20: [7,12] $\{\}$
usw...

Leere Klausel hergeleitet: M ist unerfüllbar.

Lösung zur Aufgabe 15

a)

$\models F$ gdw. $\neg F \models 0$ also wenn $\neg F$ unerfüllbar.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg(X \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee ((X \vee Z) \rightarrow (Y \wedge Z)) \\
&\equiv \neg X \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \wedge \neg(\neg(X \vee Z) \vee (Y \wedge Z)) \\
&\equiv \neg X \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg\neg(X \vee Z) \wedge \neg(Y \wedge Z)) \\
&\equiv \neg X \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z)
\end{aligned}$$

1:[] $\{\neg X\}$
2:[] $\{X, Y, \neg Z\}$
3:[] $\{X, Z\}$
4:[] $\{\neg Y, \neg Z\}$
5:[1,2] $\{Y, \neg Z\}$
6:[1,3] $\{Z\}$
7:[4,5] $\{\neg Z\}$
8:[6,7] $\{\}$

Leere Klausel: $\neg F$ unerfüllbar: F Tautologie

b)

$\Phi \models \Psi$ gdw. $\Phi \cup \neg\Psi \models 0$

wobei $\neg\Psi$ die negation aller Formeln in Ψ ist