Universität Koblenz-Landau SS '06
Institut für Informatik
Bernhard Beckert · www.uni-koblenz.de/~beckert
Claudia Obermaier · www.uni-koblenz.de/~obermaie
Cristoph Gladisch · www.uni-koblenz.de/~gladisch

Übung zur Vorlesung

Logik für Informatiker

Musterlösung Aufgabenblatt 10

Aufgabe 35

Transformieren Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln in Klauselnormalform und geben Sie dabei alle Zwischenschritte an (bereinigte Form, Pränexform, Skolemform).

(1) (a) $(\exists x(p(x,y))) \to (\exists x(q(x,x)))$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&(\exists x(p(x,y))) \to (\exists x(q(x,x)))\\
=&(\neg\exists x(p(x,y))) \lor (\exists x(q(x,x)))\\
=&\forall x(\neg p(x,y)) \lor \exists x(q(x,x))\\
&\text{Bereinigte Form:}\\
=&\forall x(\neg p(x,y)) \lor \exists z(q(z,z))\\
&\text{Pränexform:}\\
=&\forall x\exists z((\neg p(x,y) \lor q(z,z))\\
&\text{Die freie Variable } y \text{ existenzquantifizieren:}\\
&\exists y\forall x\exists z(\neg p(x,y) \lor q(z,z))\\
&\text{Skolemform:}\\
&\forall x(\neg p(x,a) \lor q(f(x),f(x)))\\
&\text{Klauselnormalform:}\\
&\{\{\neg p(x,a), q(f(x),f(x))\}\}
\end{aligned}
$$

(b) $\forall x(\forall y \exists z(r(x,y,z)) \wedge \exists z \forall y(\neg r(x,y,z)))$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\forall x(\forall y \exists z(r(x,y,z)) \wedge \exists z \forall y(\neg r(x,y,z)))\\
&\text{Bereinigte Form:}\\
=&\forall x(\forall y \exists z(r(x,y,z)) \wedge \exists z' \forall y'(\neg r(x,y',z')))\\
&\text{Pränexform:}\\
=&\forall x \forall y \exists z \exists z' \forall y'(r(x,y,z) \wedge \neg r(x,y',z'))\\
&\text{Skolemform:}\\
&\forall x \forall y \forall y'(r(x,y,f(x,y)) \wedge \neg r(x,y',g(x,y)))\\
&\text{Klauselnormalform:}\\
&\{\{r(x,y,f(x,y))\},\{\neg r(x,y',g(x,y))\}\}
\end{aligned}$$

(2) Bei welchen Umformungen im Aufgabenteil (a) handelt es sich nicht (!) um Äquivalenzumformungen? Begründen Sie!

Lösung:
Bei der Existenzquantifizierung freier Variablen und der Skolemisierung handelt es sich nicht um Äquivalenzumformungen. Diese Umformungen erhalten nur die Erfüllbarkeit der Formel.

Aufgabe 36

Transformieren Sie die Formel

$$F = \exists y \forall z(p(z,y) \leftrightarrow \neg \exists x(p(z,x) \wedge p(x,z)))$$

in Skolem-Normalform (mit Matrix in konjunktiver Normalform).

Lösung:

$$\begin{aligned}
F =&\exists y \forall z(p(z,y) \leftrightarrow \neg \exists x(p(z,x) \wedge p(x,z)))\\
=&\exists y \forall z((\neg p(z,y) \vee \neg \exists x(p(z,x) \wedge p(x,z))) \wedge (p(z,y) \vee \exists x(p(z,x) \wedge p(x,z))))\\
&\text{Bereinigte Form:}\\
=&\exists y \forall z((\neg p(z,y) \vee \forall x(\neg p(z,x) \vee \neg p(x,z))) \wedge (p(z,y) \vee \exists x'(p(z,x') \wedge p(x',z)))\\
&\text{Pränexform:}\\
=&\exists y \forall z \forall x \exists x'((\neg p(z,y) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(x,z)) \wedge (p(z,y) \vee (p(z,x') \wedge p(x',z))))\\
=&\exists y \forall z \forall x \exists x'((\neg p(z,y) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(x,z)) \wedge (p(z,y) \vee p(z,x')) \wedge (p(z,y) \vee p(x',z)))\\
&\text{Skolemform:}\\
&\forall z \forall x((\neg p(z,c) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(x,z)) \wedge (p(z,c) \vee p(z,f(z,x)) \wedge (p(z,c) \vee p(f(z,x),z)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 37

Zeigen Sie mit Hilfe prädikatenlogischer Resolution, dass die folgenden Klauselmengen unerfüllbar sind.

$$
\begin{aligned}
F = \{&\{\neg p(y), q(x), r(x, f(x))\},\\
&\{\neg p(y), q(x), s(f(x))\},\\
&\{t(a)\},\\
&\{p(a)\},\\
&\{\neg r(a, y), t(y)\},\\
&\{\neg t(x), \neg q(x)\},\\
&\{\neg t(x), \neg s(x)\}\}
\end{aligned}
$$

Lösung:

(1) $\{\neg p(y), q(x), r(x, f(x))\}$

(2) $\{\neg p(y), q(x), s(f(x))\}$

(3) $\{t(a)\}$

(4) $\{p(a)\}$

(5) $\{\neg r(a, y), t(y)\}$

(6) $\{\neg t(x), \neg q(x)\}$

(7) $\{\neg t(x), \neg s(x)\}\}$

(8) $\{\neg q(a)\}$ (aus (3) und (6) mit $mgu = \{x|a\}$)

(9) $\{q(x), s(f(x)\}$ (aus (2) und (4) mit $mgu = \{y|a\}$)

(10) $\{s(f(a))\}$ (aus (8) und (9) mit $mgu = \{x|a\}$)

(11) $\{q(x), r(x, f(x))\}$ (aus (1) und (4) mit $mgu = \{y|a\}$)

(12) $\{r(a, f(a))\}$ (aus (8) und (11) mit $mgu = \{x|a\}$)

(13) $\{t(f(a))\}$ (aus (5) und (12) mit $mgu = \{y|f(a)\}$)

(14) $\{\neg s(f(a))\}$ (aus (7) und (13) mit $mgu = \{x|f(a)\}$)

(15) $\square$ (aus (10) und (14))

$$\begin{aligned} F = \{&\{p(x,a,x)\},\\ &\{p(x,s(y),s(z)), \neg p(x,y,z)\},\\ &\{\neg p(s(s(s(a))), s(s(a)), u)\}\} \end{aligned}$$

(1) $\{p(x,a,x)\}$

(2) $\{p(x,s(y),s(z)), \neg p(x,y,z)\}$

(3) $\{\neg p(s(s(s(a))), s(s(a)), u)\}$

(4) $\{\neg p(s(s(s(a)))), s(a), z)\}$ (aus (2) und (3) mit $mgu = \{x|s(s(s(a))), y|s(a), u|s(z)\}$

(5) $\{\neg p(s(s(s(a)))), a, z\}$ (aus (2) und (4) mit der Umbenennung $z|z'$
mit $mgu = \{x|s(s(s(a))), y|a, z'|s(z)\}$

(6) $\square$ (aus (1) und (5) mit $mgu = \{x|s(s(s(a))), z|s(s(s(a)))\}$

$$F = \{\{q(x), q(s(x))\},$$
$$\{\neg q(x), \neg q(s(s(x)))\}\}$$

(1) $\{q(x), q(s(x))\}$

(2) $\{\neg q(x), \neg q(s(s(x)))\}$

(3) $\{q(s(x)), \neg q(x)\}$ (aus (1) mit der Umbenennung $x|x'$ und (2) mit $mgu = \{x'|s(x)\}$

(4) $\{q(s(x))\}$ (aus (1) mit der Ubenennung $x|x'$ und (3) mit $mgu = \{x|x'\}$

(5) $\{\neg q(x)\}$ (aus (4) mit der Ubenennung $x|x'$ und (2) mit $mgu = \{x'|s(x)\}$

(6) $\square$ aus (4) und (5) mit der Ubenennung $x|x'$ und mit $mgu = \{x'|s(x)\}$

Bernhard Beckert: Zi. B218, Tel. 287-2775, `beckert@uni-koblenz.de`
Claudia Obermaier: Zi. B219, Tel. 287-2773, `obermaie@uni-koblenz.de`
Christoph Gladisch: `gladisch@uni-koblenz.de`
Materialien: `http://www.uni-koblenz.de/~beckert/Lehre/Logik/`