**Universität Koblenz-Landau** SS '06
Institut für Informatik
Bernhard Beckert · `www.uni-koblenz.de/~beckert`
Christoph Gladisch · `www.uni-koblenz.de/~gladisch`
Claudia Obermaier · `www.uni-koblenz.de/~obermaie`

**Übung zur Vorlesung**

# Logik für Informatiker

Musterlösung Aufgabenblatt 11

## Aufgabe 38

Zeigen Sie mit prädikatenlogischer Resolution, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$F = (\forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x)))) \rightarrow \exists x(r(x) \wedge r(f(f(x))))$$

**Lösung:**
Wir zeigen, dass $F' = \neg F$ unerfüllbar ist.

- **Umwandlung von $F' = \neg F$ in Klauselnormalform:**

$$\begin{aligned}
F' = \neg F &= \neg(\forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x))) \rightarrow \exists x(r(x) \wedge r(f(f(x)))))\\
&\equiv \neg(\neg\forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x))) \vee \exists x(r(x) \wedge r(f(f(x)))))\\
&\equiv \forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x))) \wedge \neg\exists x(r(x) \wedge r(f(f(x))))\\
&\equiv \forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x))) \wedge \forall x\neg(r(x) \wedge r(f(f(x))))\\
&\equiv \forall x(\neg r(x) \rightarrow r(f(x))) \wedge \forall x(\neg r(x) \vee \neg r(f(f(x))))\\
&\equiv \forall x((r(x) \vee r(f(x))) \wedge \forall y(\neg r(y) \vee \neg r(f(f(y)))))\\
&\equiv \forall x\forall x'((r(x) \vee r(f(x))) \wedge (\neg r(y) \vee \neg r(f(f(y)))))
\end{aligned}$$

  Klauselmenge: $\{\{r(x), r(f(x))\}, \{\neg r(y), \neg r(f(f(y)))\}\}$

- **Resolution:**

  (1) $\{r(x), r(f(x))\}$
  (2) $\{\neg r(y), \neg r(f(f(y)))\}$
  (3) $\{r(f(y), \neg r(y)\}$ (aus (1) und (2) mit $\sigma = \{x|f(y)\}$)
  (4) $\{r(f(y))\}$ (aus (1) und (3) mit $\sigma = \{x|y\}$)
  (5) $\{\neg r(y')\}$ (aus (2) mit der Umbenennung $y|y'$ und (4) mit $\sigma = \{y|f(y')\}$)
  (6) $\square$ (aus (4) und (5) mit $\sigma = \{y'|f(y)\}$)

## Aufgabe 39

(1) Gegeben seien die folgenden Aussagen und benutzen Sie dafür die folgenden Prädikate:

(a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

**Lösung:**
$\forall x((\forall y(ki(y,x) \rightarrow fl(y))) \rightarrow gl(x))$

(b) Alle grünen Drachen können fliegen.

**Lösung:**
$\forall z(gr(z) \rightarrow fl(z))$

(c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachens ist.

**Lösung:**
$\forall u((\exists v(ki(u,v) \wedge gr(v))) \rightarrow gr(u))$

Diese drei Formeln werden in Klauselnormalform umgewandelt:

(a)

$$
\begin{aligned}
&\forall x((\forall y(ki(y,x) \rightarrow fl(y))) \rightarrow gl(x)) \\
\equiv&\forall x(\neg\forall y(ki(y,x) \rightarrow fl(y)) \vee gl(x)) \\
\equiv&\forall x(\exists y\neg(\neg ki(y,x) \vee fl(y)) \vee gl(x)) \\
\equiv&\forall x(\exists y(ki(y,x) \wedge \neg fl(y)) \vee gl(x)) \\
\equiv&\forall x\exists y((ki(y,x) \wedge \neg fl(y)) \vee gl(x)) \\
\equiv&\forall x\exists y((ki(y,x) \vee gl(x)) \wedge (\neg fl(y)) \vee gl(x))) \\
&\text{Skolemnormalform:} \\
&\forall x((ki(h(x),x) \vee gl(x)) \wedge (\neg fl(h(x))) \vee gl(x))) \\
&\text{Klauselmenge:} \\
&\{\{ki(h(x),x), gl(x)\}, \{\neg fl(h(x)), gl(x))\}\}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\forall z(gr(z) \rightarrow fl(z)) \\
\equiv&\forall z(\neg gr(z) \vee fl(z)) \\
&\text{Klauselmenge:} \\
&\{\{\neg gr(z), fl(z)\}\}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&\forall u((\exists v(ki(u,v) \wedge gr(v))) \rightarrow gr(u)) \\
\equiv&\forall u(\neg\exists v(ki(u,v) \wedge gr(v)) \vee gr(u)) \\
\equiv&\forall u(\forall v\neg(ki(u,v) \wedge gr(v)) \vee gr(u)) \\
\equiv&\forall u(\forall v(\neg ki(u,v) \vee \neg gr(v)) \vee gr(u)) \\
\equiv&\forall u\forall v(\neg ki(u,v) \vee \neg gr(v) \vee gr(u)) \\
&\text{Klauselmenge:} \\
&\{\{\neg ki(u,v), \neg gr(v), gr(u)\}\}
\end{aligned}
$$

(2) Zeigen Sie durch prädikatenlogische Resolution, dass daraus die Aussage (d) folgt:

- Alle grünen Drachen sind glücklich.

  **Lösung:**
  Formalisieren der Aussage (d):
  $\forall w(gr(w) \rightarrow gl(w))$

Wir zeigen nun, dass die Vereinigung der Klauselmengen zu (a), (b) und (c) zusammen mit der Klauselmenge der Negation von (d) unerfüllbar ist. Dafür wandeln wir zuerst die Negation von (d) in Klauslnormalform um:

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall w(gr(w) \rightarrow gl(w))) \\
\equiv&\neg(\forall w(\neg gr(w) \vee gl(w))) \\
\equiv&\exists w\neg(\neg gr(w) \vee gl(w))) \\
\equiv&\exists w(gr(w) \wedge \neg gl(w))) \\
&\text{Skolemnormalform:} \\
&gr(c) \vee \neg gl(c) \\
&\text{Klauselmenge:} \\
&\{\{gr(c)\}, \{\neg gl(c)\}\}
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir mit prädikatenlogischer Resolution, dass die Vereinigung der Klauselmengen aus (a), (b), (c) und der Negation von (d) unerfüllbar ist:

(1) $\{ki(h(x), x), gl(x)\}$
(2) $\{\neg fl(h(x)), gl(x))\}$
(3) $\{\neg gr(z), fl(z)\}$
(4) $\{\neg ki(u,v), \neg gr(v), gr(u)\}$
(5) $\{gr(c)\}$
(6) $\{\neg gl(c)\}$
(7) $\{\neg fl(h(c))\}$ (aus (2) und (6) mit $\sigma = \{x|c\}$)
(8) $\{ki(h(c), c)\}$ (aus (1) und (6) mit $\sigma = \{x|c\}$)
(9) $\{\neg gr(h(c))\}$ (aus (3) und (7) mit $\sigma = \{z|h(c)\}$)
(10) $\{\neg ki(h(c), v), \neg gr(v)\}$ (aus (4) und (9) mit $\sigma = \{u|h(c)\}$)
(11) $\{\neg gr(c)\}$ (aus (8) und (10) mit $\sigma = \{v|c\}$)
(12) $\square$ (aus (5) und (11))

## Aufgabe 40

Betrachten Sie jeweils die folgenden Formelmengen. Falls sie unifizierbar sind, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator $\mu$ sowie das Ergebnis der Unifikation an.

(a) $\{p(x, f(y)), p(g(y, z), u), p(g(u, a), f(b))\}$

**Lösung:**
Die Formelmenge ist nicht unifizierbar.
Die Anwendung der Regeln liefert:
$w = p(x, f(y))$
$w = p(g(y, z), u)$ ✓(Regel (3))
$w = p(g(u, a), f(b))$ ✓(Regel (3))
$p(x, f(y) = p(g(y, z), u)$ ✓(Regel (3))
$p(x, f(y) = p(g(u, a), f(b))$ ✓(Regel (3))
$x = g(y, z)$
$f(y) = u$ ✓(Regel(1))
$u = f(y)$ ✓(Regel(4))
$x = g(u, a)$ ✓(Regel(4))
$f(y) = f(b)$ ✓(Regel(3))
$y = b$
$g(y, z) = g(u, a)$ ✓(Regel(3))
$y = u$
$z = a$
$u = f(u)$ FAIL! (Regel(7))

(b) $\{p(x, x), p(a, f(y))\}$

**Lösung:**
Die Formelmenge ist nicht unifizierbar.
Die Anwendung der Regeln liefert:
$p(x, x) = p(a, f(y))$ ✓(Regel (3))
$x = a$ ✓(Regel (4))
$x = f(y)$
$a = f(y)$ FAIL! (Regel (6))

(c) $\{p(x, a), p(f(b), y)\}$

**Lösung:**
Die Formelmenge ist unifizierbar.
Die Anwendung der Regeln liefert:
$p(x, a) = p(f(b), y)$ ✓(Regel (3))
$x = f(b)$
$a = y$ ✓(Regel (1))
$y = a$
$\sigma = \{x|f(b), y|a\}$
Ergebnis der Unifikation: $p(f(b), a)$

## Aufgabe 41

Betrachten Sie die folgende Formelmenge:

$$\{p(x_1, x_2), p(f(x_2), f(x_3)), \ldots, p(f^{n-2}(x_{n-1}), f^{n-2}(x_n)), p(f^{n-1}(x_n), f^{n-1}(x_{n+1}))\}$$

Dabei ist $f^n(x)$ wie folgt definiert:

$$f^1(x) = f(x)$$
$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$$

(1) Bestimmen Sie für $n = 3$ einen allgemeinsten Unifikator der Formelmenge.

**Lösung:**
Die Formelmenge sieht für $n = 3$ wie folgt aus:

$$\{p(x_1, x_2), p(f(x_2), f(x_3)), p(f(f(x_3)), f(f(x_4)))\}$$

Die Anwendung der Regeln liefert:
$w = p(x_1, x_2)$ ✓(Regel (4))
$w = p(f(x_2), f(x_3))$ ✓(Regel (4))
$w = p(f(f(x_3)), f(f(x_4)))$ ✓(Regel (4))
$p(x_1, x_2) = p(f(x_2), f(x_3))$ ✓(Regel (3))
$p(x_1, x_2) = p(f(f(x_3)), f(f(x_4)))$ ✓(Regel (3))
$x_1 = f(x_2)$ ✓(Regel (4))
$x_2 = f(x_3)$ ✓(Regel (4))
$x_1 = f(f(x_3))$ ✓(Regel (4))
$x_2 = f(f(x_4))$ ✓(Regel (4))
$f(x_2) = f(f(x_3))$ ✓(Regel (3))
$x_2 = f(x_3)$ ✓(bereits in der Gleichungsmenge enthalten)
$f(x_3) = f(f(x_4))$ ✓(Regel (3))
$x_3 = f(x_4)$
$x_2 = f(f(x_4))$
$x_1 = f(f(f(x_4)))$
$w = p(f(f(f(x_4))), f(f(x_4)))$
$\sigma = \{x_1|f(f(f(x_4))), x_2|f(f(x_4)), x_3|f(x_2)\}$

(2) Geben Sie, für beliebige $n$, einen allgemeinsten Unifikator für die Formelmenge an (ohne Beweis).

**Lösung:**

$$\sigma = \{x_i|f^{n+1-i}(x_{n+1})\}$$

## Aufgabe 42

Sei $F = \{\{\neg p(x), q(f(x), x)\}, \{p(g(b))\}, \{\neg q(y, z)\}\}$ eine Klauselmenge.

(1) Geben Sie

(a) das Herbrand-Universum,

**Lösung:**
$U_H = \{b, g(b), f(b), g(g(b)), f(f(b)), g(f(b)), f(g(b)), \ldots\}$

(b) eine Herbrand-Interpretation an.

**Eine mögliche Lösung:**
$U_H$ wie oben
$f^I(t) = f(t)$ mit $t \in U_H$
$g^I(t) = g(t)$ mit $t \in U_H$
$p^I = \{g(b)\}$
$q^I = \{(f(b), b), (b, b)\}$

(2) Warum ist es von Interesse, Herbrand-Universen zu betrachten?

**Lösung:**

- Jede erfüllbare Klauselmenge hat ein Herbrand-Modell.
- Nach dem Satz von Herbrand gibt es zu jeder unerfüllbaren prädikatenlogischen Klauselmenge eine Menge von Grundinstanzen von Klauseln dieser Klauselmenge, die unerfüllbar ist. Damit kann die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge in endlich vielen Schritten nachgewiesen werden.

*Bernhard Beckert*: Zi. B218, Tel. 287-2775, `beckert@uni-koblenz.de`
*Claudia Obermaier*: Zi. B219, Tel. 287-2773, `obermaie@uni-koblenz.de`
*Christoph Gladisch*: `gladisch@uni-koblenz.de`
Materialien: `http://www.uni-koblenz.de/~beckert/Lehre/Logik/`