Nicht-klassische Logiken

Bernhard Beckert

beckert@uni-koblenz.de

UNIVERSITÄT KOBLENZ-LANDAU

Sommersemester 2003

Basierend auf der gleichnamigen Vorlesung
von Prof. Dr. Peter H. Schmitt
an der Universität Karlsruhe

Web-Seite

Alle für diese Vorlesung relevanten Informationen finden sich auf der Web-Seite

```
www.uni-koblenz.de/~beckert/
    Lehre/Nicht-klassische-Logiken
```

Inhalt

- Wiederholung
- Mehrwertige Logiken
- Modale Logiken
- Temporale Logik

Inhalt: Mehrwertige Logiken

- Einführung
- Eine dreiwertige Logik
- Funktionale Vollständigkeit
- Kalküle
- Anwendungen
- Unendlichwertige Logiken
- Reduktion auf zweiwertige Logik
- Abstrakte Konsequenzrelationen

Inhalt: Modale Logiken

- Einführung in die modale Aussagenlogik
- Korrespondenztheorie
- Vollständigkeit und kanonische Modelle
- Entscheidbarkeit modaler Aussagenlogiken
- Kalküle für modale Quantorenlogiken
- Reduktion auf Prädikatenlogik erster Stufe
- Dynamische Logik

Inhalt: Temporale Logiken

- Lineare Temporale Logik
- Verzweigende Temporale Logiken
- Model Checking

Wiederholung

Grundbestandteile einer Logik

- einen syntaktischen Teil; welche Symbole werden zum Aufbau der Sprache benutzt, welche Kombinationen dieser Symbole sind in der Sprache der Logik erlaubt?
- einen semantischen Teil; worüber kann man in der Sprache der Logik reden, welche Strukturen kann man mit ihrer Hilfe untersuchen?
- einen Teil, der den Zusammenhang herstellt zwischen Syntax und Semantik in Form einer Wahrheitsdefinition; wann ist eine Formel der Logik in einer Struktur wahr?

Prädikatenlogik erster Stufe

Syntax (Teil 1)

Vokabular V:

- einer Menge von Funktionszeichen Fkt(V)
- einer Menge von Konstantenzeichen Kon(V)
- einer Menge von Prädikatszeichen Pr(V)

Das Vokabular V darf die leere Menge $\emptyset$ sein.

logische Symbole:

- die aussagenlogischen Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$
- die Quantoren $\forall x$, $\exists x$
- die Variablen x, y, z, x_i, y_j etc.
- Klammern (,)

Prädikatenlogik erster Stufe

Syntax (Teil 2)

Funktionsterme:

1. Konstanten sind Funktionsterme.
2. Variable sind Funktionsterme.
3. sind $t_1, \ldots, t_k$ Funktionsterme und f ein k-stelliges Funktionszeichen, dann ist $f(t_1, \ldots, t_k)$ wieder ein Funktionsterm.

Atomare Formeln sind genau die Zeichenfolgen der Form:

$$p(t_1, \ldots, t_n)$$

wobei p ein n-stelliges Prädikatszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n$ Funktionsterme sind. Die Menge der atomaren Formeln wird mit $At(V)$ bezeichnet.

Prädikatenlogik erster Stufe

Syntax (Teil 3)

Formeln:

1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. Sind A, B Formeln, so auch
   - $(A \wedge B)$ gelesen: A und B
   - $(A \vee B)$ gelesen: A oder B
   - $(A \to B)$ gelesen: wenn A, dann B
   - $\neg A$ gelesen: nicht A
3. $(\exists x A)$ gelesen: es gibt x, so daß A
4. $(\forall x A)$ gelesen: für alle x gilt A

Manipulation von Formeln

Substitutionen:

Eine Substitution s ist eine Abbildung von der Menge aller Variablen in die Menge aller Terme über einem gegebenen Vokabular V. Der Definitionsbereich einer Substitution s:

$$Def(s) = \{x : s(x) \neq x\}$$

Der Wertebereich der Substitution s:

$$Wb(s) = \{s(x) : x \in Def(s)\}$$

Wir betrachten nur Substitutionen s mit endlichem $Def(s)$. Dann kann s geben werden durch die Menge der Paare

$$\{\langle x, s(x)\rangle \mid s(x) \neq x\}$$

an.

Anwendung von Substitutionen

Anwendung einer Substitution s auf einen Funktionsterme t:

$$s(t) = \begin{cases} s(x) & t \text{ eine Variable } x \text{ ist} \\ c & t \text{ eine Konstante } c \text{ ist} \\ f(s(t_1), \ldots, s(t_k)) & t = f(t_1, \ldots, t_k) \end{cases}$$

Für eine atomare Formel $A(t_1, \ldots, t_k)$ definieren wir

$$s(A) = A(s(t_1), \ldots, s(t_k)).$$

Für zusammengesetzte Formeln haben wir:

- $s(A \wedge B) = s(A) \wedge s(B)$
- $s(A \vee B) = s(A) \vee s(B)$
- $s(A \rightarrow B) = s(A) \rightarrow s(B)$
- $s(\neg A) = \neg s(A)$

Prädikatenlogische Strukturen

Wir fixieren ein Vokabular V.

Eine Stuktur

$$\mathcal{H} = \langle U, \{c^{\mathcal{H}} : c \in Kon(V)\}, \{f^{\mathcal{H}} : f \in Fkt(V)\}, \{p^{\mathcal{H}} : p \in Pr(V)\}\rangle$$

ist gegeben durch

- ein Bereich U von Elementen,
- ein Element $c^{\mathcal{H}} \in U$
  für jedes Konstantenzeichen c aus V,
- eine Funktion $f^{\mathcal{H}} : U^k \to U$ für jedes k-stellige Funktionszeichen f aus V,
- eine Menge $p^{\mathcal{H}} \subseteq U^k$
  für jedes k-stellige Prädikatszeichen p aus V.

Prädikatenlogischen Strukturen

Beispiel 1 zum Vokabular V_1

U_1	=	$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*$
$nil^{\mathcal{H}_1}$	=	die leere Folge
$a^{\mathcal{H}_1}$	=	1
$f^{\mathcal{H}_1}(a,b)$	=	$\langle a, b_1, \ldots, b_k \rangle$
		falls $a \in \mathbb{N}$ und $b = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$
$f^{\mathcal{H}_1}(a,b)$	=	$\langle\rangle$ in allen anderen Fällen.
$d^{\mathcal{H}_1}(a,b,c)$	gdw	$b \in \mathbb{N}$, $a, c \in \mathbb{N}^*$ und c aus a entsteht
		durch Wegfall eines Vorkommens von b.
		Kommt b in a nicht vor, muß $c = a$ sein.

Prädikatenlogischen Strukturen

Beispiel 2 zum Vokabular V_1

U_2	=	die Menge aller natürlichen Zahlen.
$nil^{\mathcal{H}_2}$	=	0
$a^{\mathcal{H}_2}$	=	1
$f^{\mathcal{H}_2}(a,b)$	=	$a * b$ (das Produkt von a und b)
$d^{\mathcal{H}_2}(a,b,c)$	gdw	$b * c = a$.

Das Vokabular V_1 bestehend aus:

Konstantensymbole	a, nil
Funktionszeichen	$f(\_,\_)$
Prädikatszeichen	$d(\_,\_,\_)$

Prädikatenlogischen Strukturen

Beispiel 3 zum Vokabular V_1

U_3	=	Menge aller Terme für V_1.
$nil^{\mathcal{H}_3}$	=	nil
$a^{\mathcal{H}_3}$	=	a
$f^{\mathcal{H}_3}(a,b)$	=	$f(a,b)$
$d^{\mathcal{H}_3}(a,b,c)$	gdw	$a = f(a_1, f(a_2, \ldots f(a_k, nil)) \ldots)$ $c = f(c_1, f(c_2, .., f(c_{k-1}, nil))..)$ $\{c_i : i < k\} \cup \{b\} = \{a_i : i < k\}$ falls $a = nil$ oder b nicht in a vorkommt, so muß $c = a$ sein.

Prädikatenlogik erster Stufe

Interpretation von Formeln (1)

In Abhängigkeit von der Struktur $\mathcal{M}$ für V und einer Variablenbelegung b ordnet man jedem Funktionsterm t, der nur Zeichen aus V enthält, ein Element $I(\mathcal{M}, b)(t)$ aus U zu. Die formale Definition von $I(\mathcal{M}, b)(t)$ erfolgt rekursiv parallel zur rekursiven Definition von Funktionstermen.

$$
\begin{aligned}
I(\mathcal{M}, b)(t) &= b(t), \text{ falls } t \text{ Variable ist} \\
I(\mathcal{M}, b)(t) &= t^{\mathcal{M}}, \text{ falls } t \text{ Konstante ist} \\
I(\mathcal{M}, b)(f(t_1, \ldots, t_k)) &= f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k) \\
&\quad \text{mit } a_i = I(\mathcal{M}, b)(t_i)
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogik erster Stufe

Interpretation von Formeln (2)

Ebenso kann man jeder atomaren Formel A, die nur Zeichen aus V enthält, einen Wahrheitswert zuordnen. Wir schreiben:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{M}, b) \models (A \land B) & \text{gdw} & \mathcal{M}, b) \models A \text{ und } (\mathcal{M}, b) \models B \\
(\mathcal{M}, b) \models (A \lor B) & \text{gdw} & (\mathcal{M}, b) \models A \text{ oder } (\mathcal{M}, b) \models B \\
(\mathcal{M}, b) \models (A \rightarrow B) & \text{gdw} & \text{nicht } (\mathcal{M}, b) \models A \text{ oder } (\mathcal{M}, b) \models B \\
(\mathcal{M}, b) \models \neg A & \text{gdw} & \text{nicht } (\mathcal{M}, b) \models A \\
(\mathcal{M}, b) \models \exists x A & \text{gdw} & \text{es gibt ein Element } u \in U, \\
 & & \text{so daß } (\mathcal{M}, b') \models A, \\
(\mathcal{M}, b) \models \forall x A & \text{gdw} & \text{für alle } u \in U \text{ gilt } (\mathcal{M}, b') \models A
\end{array}
$$

wobei $b'(y) = b(y)$ falls $y \neq x$ $\quad b'(y) = u$ falls $y = x$.

Prädikatenlogik erster Stufe

Alternative Notation

Bei der Berechnung von $I(\mathcal{M}, b)(t)$ und $(\mathcal{M}, b) \models A$ kommt es nur auf die Belegung der Variablen an, die tatsächlich in t bzw. A vorkommen.

$$\begin{array}{lll} I(\mathcal{M}, n_1, \ldots, n_k)(t) & \text{für} & I(\mathcal{M}, b)(t) \\ \mathcal{M} \models A(n_1, \ldots, n_k) & \text{für} & (\mathcal{M}, b) \models A \end{array}$$

Logische Folgerung

Ist D eine Menge von Formeln und A eine einzelne Formel in $Fml(V)$, so nennen wir A eine Folgerung oder eine Konsequenz aus D, in Symbolen

$$D \models A,$$

wenn für jede Struktur $\mathcal{M}$ für V aus

$$\mathcal{M} \models C^* \qquad \text{für alle } C \in D$$

folgt, dass

$$\mathcal{M} \models A^*$$

Der universelle Abschluß C^* einer Formel C wird gebildet, indem für jede Variable x in C, die nicht schon im Bereich eines Quantors steht, der Allquantor $\forall x$ der Formel C vorangestellt wird.