Geschichte

- Jan Łukasiewicz:
  O logice tròjwartościowej (On 3-valued logic).
  Ruch Filozoficzny, Vol. 5, 1920.
- Jan Łukasiewicz:
  Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.
  Comptes rendus des séance de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Vol .23, 1930.
- S. McCall:
  Polish Logic: 1920–1939.
  Oxford University Press, 1967.

Geschichte

- Emil Post:
  Introduction to a general theory of elementary propositions.
  American J. of Math., Vol. 43, 1921.
- S. C. Kleene:
  On a notation for ordinal numbers.
  J. of Symbolic Logic, Vol.3, 1938.

Lieratur

- J. B. Rosser, A. R. Turquette:
  Many-valued Logics.
  North-Holland, 1952.
- N. Rescher:
  Many-valued Logic.
  McGraw-Hill, 1989.
- Alasdair Urquhart:
  Kapitel über mehrwertige Logik, Band III des Handbook of Philosophical Logic, 1986.
- Bolc und Borowik:
  Many-Valued Logics.
  Springer Verlag 1992,

Literatur

- Reiner Hähnle:
  Automated Deduction in Multiple-valued Logics.
  Clarendon Press, Oxford, 1993.
- Grzegorz Malinowski:
  Many-Valued Logics.
  Oxford Logic Guides, Vol. 25, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- Siegfried Gottwald
  A Treatise On Many-Valued Logics.
  Studies in Logic and Computation, Vol. 9, Research Studies Press, 2001.

Einführungsbeispiel

> Da die *Earl Camden* erst in einigen Tagen auslief, saß John Franklin im Hafen von Whampoa neben dem Maler William Westall untätig auf einer Mauer und beobachtete, was verladen wurde. Schiffe von über acht Fuß Tiefgang durften nicht flußaufwärts bis nach Kanton. …

Sten Nadolny:
Die Entdeckung der Langsamkeit.
Piper, München, Zürich, 1987.

Beispiel: Basisvokabular

Bezeichner für Personen:

JF	John Franklin
WW	William Westall

Bezeichner für Orte:

M_1	Mauer
H	Hafen von Whampoa
$Kanton$	

Prädikatszeichen:

$sitzt(x)$

$beobachtet(x)$

$auf(x, y)$

$in(x, y)$

Beispielaussagen

1. $sitzt(JF)$
2. $beobachtet(JF)$
3. $auf(JF, M_1)$
4. $in(JF, H)$
5. $sitzt(WW)$
6. $auf(WW, M_1)$
7. $in(WW, H)$
8. $beobachtet(WW)$
9. $in(JF, Kanton)$
10. $in(WW, Kanton)$

Dabei ist nicht berücksichtigt, daß die beschriebene Situation in der Vergangenheit liegt.

Partielle Logik

Partielle Wahrheitsfunktion $v : B \to \{0, 1\}$

A	$v(A)$	A	$v(A)$
$\mathit{sitzt}(JF)$	1	$\mathit{sitzt}(WW)$	1
$\mathit{beobachtet}(JF)$	1	$\mathit{beobachtet}(WW)$	
$\mathit{auf}(JF, M_1)$	1	$\mathit{auf}(WW, M_1)$	1
$\mathit{in}(JF, H)$	1	$\mathit{in}(WW, H)$	1
$\mathit{in}(JF, \mathit{Kanton})$	0	$\mathit{in}(WW, \mathit{Kanton})$	0

Bewertungsfunktion

$$v_1 : B \to \{1, 0\}$$

erweitert die Bewertungsfunktion

$$v : B \to \{1, 0\}$$

in Zeichen

$$v \sqsubseteq v_1$$

wenn

1. v_1 eine totale Funktion ist,
2. mit v an allen Stellen übereinstimmt, an denen v definiert ist.

Bewertungsfunktionen

Am Beispiel der Konjunktion:

$v(A \wedge B) = 0$ gdw für alle v_1 mit $v \sqsubseteq v_1$ gilt $v_1(A \wedge B) = 0$

und entsprechend für den zweiten Wahrheitswert:

$v(A \wedge B) = 1$ gdw für alle v_1 mit $v \sqsubseteq v_1$ gilt $v_1(A \wedge B) = 1$

Wahrheitstafeln für partielle Logik

$\wedge$	1	$undef$	0
1	1	$undef$	0
$undef$	$undef$	$undef$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$undef$	0
1	1	1	1
$undef$	1	$undef$	$undef$
0	1	$undef$	0

Mehrwertige Aussagenlogik

Die Bestimmungsstücke der Syntax

- Anzahl m der Wahrheitswerte und deren Bezeichnung. Fürs erste benutzen wir

$$M = \{0, \ldots, m-1\}.$$

- Menge F der Basisoperatoren der Logik
- Menge P von aussagenlogischen Variablen
- Menge aller Terme, die mit den Operatoren in F und den Variablen aus P aufgebaut werden können.

Mehrwertigen Aussagenlogik

Die Bestimmungsstücke der Semantik

- Bedeutung der Operatoren aus F
  (z. B. durch die Angabe von Wahrheitstabellen)
- jedem f aus F wird eine Funktion $f^{\mathcal{M}}$ auf der Menge M zugeordnet.
- Die Struktur

  $$\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}} : f \in F)$$

  nennt man eine F-**Algebra** oder die **Matrix** der Logik.

Mehrwertigen Aussagenlogik

Wahrheitswerte

- v sei eine Abbildung, die jeder aussagenlogischen Variable einen Wahrheitswert in M zuordnet.
- Fortsetzung von v ordnet jeder aussagenlogische Formel t einen Wahrheitswert $v_{\mathcal{M}}(t)$ zu.
- Menge der designierten Wahrheitswerte ist eine nichtleere Teilmenge $D \subseteq M$
- Eine Formel t heißt wahr in der Matrix $\mathcal{M}$ unter der Belegung v, falls $v_{\mathcal{M}}(t) \in D$ gilt.
- t heißt eine $\mathcal{M}$-Tautologie, falls für alle v gilt $v_{\mathcal{M}}(t) \in D$.

Die Logik $\mathcal{L}_3$

Wahrheitswerte	$\{1, u, 0\}$
Operatoren	$\vee, \wedge, \neg, \sim$
D	$\{1\}$

Wahrheitstafeln für $\wedge$ und $\vee$

$\wedge$	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	0
0	0	0	0

$\vee$	1	u	0
1	1	1	1
u	1	u	u
0	1	u	0

Kann man zusammenfassen zu

$$
\begin{aligned}
v(A \wedge B) &= \text{Minimum von } v(A) \text{ und } v(B) \\
v(A \vee B) &= \text{Maximum von } v(A) \text{ und } v(B),
\end{aligned}
$$

wenn man sich die Wahrheitswerte in der Reihe $0 < u < 1$ angeordnet denkt.

Wahrheitstafeln für Negationen

A	$\neg A$	$\sim A$	$\sim\neg A$	$\sim\sim A$	$\neg\neg A$	$\neg\sim A$
1	0	0	1	1	1	1
u	u	1	1	0	u	0
0	1	1	0	0	0	0

Natürlichsprachliche Umschreibung:

$v(A) = 1$ gdw. A ist wahr
$v(\neg A) = 1$ gdw. A ist falsch
$v(\sim A) = 1$ gdw. A ist nicht wahr
$v(\sim\neg A) = 1$ gdw. A ist nicht falsch.

$\mathcal{L}_3$ -Strukturen (Prädikatenlogik)

Eine $\mathcal{L}_3$ -Struktur im Vokabular V, bezeichnet mit

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_0, v_{\mathcal{M}} \rangle,$$

besteht aus einer Prästruktur $\mathcal{M}_0$ für V, d.h. aus einer Menge zusammen mit der üblichen Interpretation für Konstanten und Funktionssymbole, und einer Funktion $v_{\mathcal{M}}$, die jedem Relationszeichen P und jedem n-Tupel $m_1, \ldots, m_n$ von Elementen aus $\mathcal{M}_0$ (n = Stellenzahl von P) einen der Wahrheitswerte 1, u oder 0 zuordnet.

$$\begin{array}{rcll}
v_{\mathcal{M}}(P(m_1, \ldots, m_n)) & = & 1 & \text{(wahr)} \\
v_{\mathcal{M}}(P(m_1, \ldots, m_n)) & = & u & \text{(unbestimmt)} \\
v_{\mathcal{M}}(P(m_1, \ldots, m_n)) & = & 0 & \text{(falsch)}
\end{array}$$

Interpretation der Quantoren

$v(\forall x A(x)) = 1$	gdw.	für alle $m \in \mathcal{M}$ gilt $v(A(m/x)) = 1$.
$v(\forall x A(x)) = 0$	gdw.	es gibt ein $m \in \mathcal{M}$, mit $v(A(m/x)) = 0$.
$v(\forall x A(x)) = u$		sonst.

$v(\exists x A(x)) = 1$	gdw.	es gibt ein $m \in \mathcal{M}$, mit $v(A(m/x)) = 1$.
$v(\exists x A(x)) = 0$	gdw.	für alle $m \in \mathcal{M}$ gilt $v(A(m/x)) = 0$.
$v(\exists x A(x)) = u$		sonst.

Basisdefinitionen

Sei S eine Menge von $Fml_3(V)$-Formeln und
A eine $Fml_3(V)$-Formel.

Wir nennen A eine $\mathcal{L}_3$ -logische Folgerung aus S, wenn für alle dreiwertigen Strukturen $\mathcal{M}$ zum Vokabular V aus

$$v_{\mathcal{M}}(B) = 1 \quad \text{für alle } B \in S$$

folgt, daß

$$v_{\mathcal{M}}(A) = 1$$

Wir schreiben dafür

$$S \models_3 A.$$

Basisdefinitionen

Die Formel A heißt eine $\mathcal{L}_3$ -Tautologie, wenn $v_{\mathcal{M}}(A) = 1$ für alle dreiwertigen Strukturen $\mathcal{M}$ gilt.
Wir schreiben dafür

$$\models_3 A.$$

Beobachtungen

- Jede $\mathcal{L}_3$ -Tautologie ist auch eine zweiwertige Tautologie.
- Nicht jede zweiwertige Tautologie ist auch eine $\mathcal{L}_3$ -Tautologie. Beispiel:

$$A \vee \neg A$$

Schwache Implikation

Die aussagenlogischen Verknüpfungen $\supset$ und $\equiv$ werden als definierte Zeichen eingeführt:

Schwache Implikation

$$A \supset B \quad := \quad \sim A \vee B$$

Schwache Äquivalenz

$$A \equiv B \quad := \quad (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

A ⊃ B			
B ↓ A →	1	u	0
1	1	1	1
u	u	1	1
0	0	1	1

A ≡ B			
	1	u	0
1	1	u	0
u	u	1	1
0	0	1	1

Starke Implikation

Starke Implikation

$$A \rightarrow B \quad := \quad \neg A \vee B$$

Starke Äquivalenz

$$A \leftrightarrow A \quad := \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

A → B			
B ↓ A →	1	u	0
1	1	1	1
u	u	u	1
0	0	u	1

A ↔ B			
	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	u
0	0	u	1

Vergleich der Implikationen

$\mathsf{A} \supset \mathsf{B}$			
$\mathsf{B} \downarrow \mathsf{A} \rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	1	1
0	0	1	1

$\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$			
$\mathsf{B} \downarrow \mathsf{A} \rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	u	1
0	0	u	1

Vergleich der Äquivalenzen

$A \equiv B$			
	1	u	0
1	1	u	0
u	u	1	1
0	0	1	1

$A \leftrightarrow B$			
	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	u
0	0	u	1

Einige $\mathcal{L}_3$ -Tautologien

1. $\neg\neg A \; id \; A$
2. $\sim\sim A \;\equiv\; A$
3. $\neg\sim A \;\equiv\; A$
4. $(A \wedge B) \vee C \; id \; (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
5. $(A \vee B) \wedge C \; id \; (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
6. $\neg(A \vee B) \; id \; \neg A \wedge \neg B$
7. $\neg(A \wedge B) \; id \; \neg A \vee \neg B$
8. $\sim(A \vee B) \; id \; \sim(A) \wedge \sim(B)$
9. $\sim(A \wedge B) \; id \; \sim(A) \vee \sim(B)$
10. $\sim(\forall x A) \; id \; \exists x \sim A$
11. $\neg(\forall x A) \; id \; \exists x \neg A$
12. $\sim(\exists x A) \; id \; \forall x \sim A$
13. $\neg(\exists x A) \; id \; \forall x \neg A$

Äquivalenzen

$$
\begin{array}{lcl}
A \supset B & := & \sim A \vee B \\
A \rightarrow B & := & \neg A \vee B \\
\\
A \equiv B & := & (A \supset B) \wedge (B \supset A) \\
A \leftrightarrow B & := & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\
A \approx B & := & (A \equiv B) \wedge (\neg A \equiv \neg B) \\
A \Leftrightarrow B & := & (A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \leftrightarrow \neg B) \\
A \;\; id \;\; B & := & \sim\sim(A \approx B)
\end{array}
$$

Äquivalenzen

A	B	$A \equiv B$	$A \leftrightarrow B$	$A \approx B$	$A \Leftrightarrow B$	$A\ id\ B$
0	0	1	1	1	1	1
0	u	1	u	u	u	0
0	1	0	0	0	0	0
u	0	1	u	u	u	0
u	u	1	u	1	u	1
u	1	u	u	u	u	0
1	0	0	0	0	0	0
1	u	u	u	u	u	0
1	1	1	1	1	1	1

Ein Lemma

Sei A eine $\mathcal{L}_3$ -Formel, die die starke Negation $\neg$ nicht enthält.
Dann gilt:

A ist eine $\mathcal{L}_3$ -Tautologie

genau dann, wenn

A ist eine zweiwertige Tautologie.

Wir nehmen dabei an, daß das im zweiwertigen Fall einzige vorhandene Negationszeichen mit dem schwachen Negationszeichen $\sim$ identifiziert wird.

Beweis “$\Rightarrow$”

Jede $\mathcal{L}_3$ -Tautologie auch eine zweiwertige Tautologie, denn die Einschränkung der dreiwertigen Operatoren auf zwei Wahrheitswerte stimmt mit den zweiwertigen Operatoren überein.

Beweis "$\Leftarrow$"

Für jede $\mathcal{L}_3$ -Struktur $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_0, v_0 \rangle$ sei $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{M}_0, v_1 \rangle$ mit

$$v_1(t) = \begin{cases} v_0(t) & \text{falls } v_0(t) \neq u \\ 0 & \text{falls } v_0(t) = u \end{cases}$$

Ist A eine zweiwertige Tautologie dann gilt für alle dreiwertigen Strukturen $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_0, v_0 \rangle$

$$v_1(A) = 1$$

.

Beweis (Forts.)

Dazu zeigen wird, daß
für alle Formeln A und alle dreiwertigen Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} v_0(A) = 1 & \text{gdw.} & v_1(A) = 1 \\ v_0(A) = 0 & \text{gdw.} & v_1(A) = 0 \\ v_0(A) = u & \text{gdw.} & v_1(A) = 0 \end{array}$$

Diese Behauptung läßt sich leicht durch Induktion über die Komplexität von A beweisen.

Übungsaufgabe

Ist A eine $\mathcal{L}_3$ -Formel, in der $\sim$ nicht vorkommt, dann ist A keine Tautologie.

Übungsaufgabe

Ist A eine $\mathcal{L}_3$ -Formel, in der $\sim$ nicht vorkommt,
dann ist A keine Tautologie.

Lösung: Belege alle Variablen mit u