Übungsaufgabe

Zeige, daß

$$\forall x q(x) \supset q(t/x)$$

für jeden Term t eine $\mathcal{L}_3$ -Tautologie ist.

Lösung:
Folgt aus Definition der Operatoren

Übungsaufgabe

Finden Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, daß

$$\forall x q(x) \to q(t/x)$$

keine Tautologie ist.

Lösung:
$q \to q$ ist keine Tautologie

(s. erste Aufgabe)

Übungsaufgaben

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

4. Wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist und A eine Tautologie ist, dann ist auch B eine Tautologie.

   Lösung: richtig

5. Wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist und A erfüllbar ist, dann ist auch B erfüllbar.

   Lösung: richtig

Übungsaufgaben

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

6. Wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist und A eine Nichttautologie, dann ist auch B eine Nichttautologie.

   Lösung: richtig

7. Wenn $A \equiv B$ eine Tautologie ist und A zweiwertig ist, dann ist auch B zweiwertig.

   Lösung: falsch

A heißt eine Nichttautologie, wenn für jede dreiwertige Struktur $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_0, v_\mathcal{M} \rangle$ gilt $v_\mathcal{M}(A) \neq 1$.

A heißt zweiwertig, wenn für jede dreiwertige Struktur $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_0, v_\mathcal{M} \rangle$ gilt $v_\mathcal{M}(A) \in \{1, 0\}$.

Definition: Standardfortsetzung

Sei $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gegeben.
Die Standardfortsetzung

$$f^* : \{0,u,1\}^n \to \{0,u,1\}$$

von f wird wie folgt bestimmt:
Sei $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ ein Argumenttupel aus $\{0,u,1\}^n$. Die Menge $U(w_1, \ldots, w_n) \subseteq \{0,1\}^n$ entsteht, indem auf alle möglichen Arten die w_i mit $w_i = u$ durch 0 und 1 ersetzt werden.

$$f^*(\vec{w}) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } \vec{v} \in U(\vec{w}) \text{ gilt } f(\vec{v}) = 0 \\ 1 & \text{für alle } \vec{v} \in U(\vec{w}) \text{ gilt } f(\vec{v}) = 1 \\ u & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: $U(u,1,u) = \{\langle 0,1,0 \rangle, \langle 0,1,1 \rangle, \langle 1,1,0 \rangle, \langle 1,1,1 \rangle\}$

Übungsaufgaben

1. Zeige, daß die dreiwertigen Operatoren $\wedge$,$\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ Standardfortsetzungen ihrer jeweiligen zweiwertigen Gegenstücke sind.

   Lösung: Hausaufgabe

2. Zeigen, daß das nicht auf $\supset$ und $\equiv$ zutrifft.

   Lösung:

   $v(A \rightarrow B) = 0$ für $v(A) = 1$ und $v(B) = 0$ und
   $v(A \rightarrow B) = 1$ für $v(A) = 0$ und $v(B) = 0$, und daher
   $v(A \rightarrow^* B) = u$ für $v(A) = u$ und $v(B) = 0$, aber
   $v(A \supset B) = 1$ für $v(A) = u$ und $v(B) = 0$

   Für $\equiv$: Hausaufgabe

Übungsaufgabe

Zeigen, daß aus

$$f(\vec{w}) = 1 \qquad \text{für alle } \vec{w} \in \{0,1\}^n$$

auch

$$f^*(\vec{v}) = 1 \qquad \text{für alle } \vec{v} \in \{0,u,1\}^n$$

folgt.

Lösung: Hausaufgabe

Übungsaufgabe

Zeigen, daß die Standardfortsetzung nicht immer mit der Hintereinanderausführung von Funktionen vertauschbar ist.

Hinweis: Geben Sie dafür Funktionen f (zweistellig) und g (einstellig) an, so daß

$$[\lambda x.\lambda y.f(x,g(y))]^* \neq \lambda x.\lambda y.f^*(x,g^*(y))$$

Lösung:

$f(A,B) = A \vee B$
$g(C) = \neg C$

Definition: Monotone Funktionen

Wir nennen eine Funktion $g : \{0, u, 1\}^n \to \{0, u, 1\}$ monoton, wenn für alle $\vec{w}, \vec{v} \in \{0, u, 1\}^n$ aus

$$\vec{w} \leq_i \vec{v}$$

folgt, daß

$$g(\vec{w}) \leq_i g(\vec{v})$$

Dabei gilt

$$\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \leq_i \langle v_1, \ldots, v_n \rangle,$$

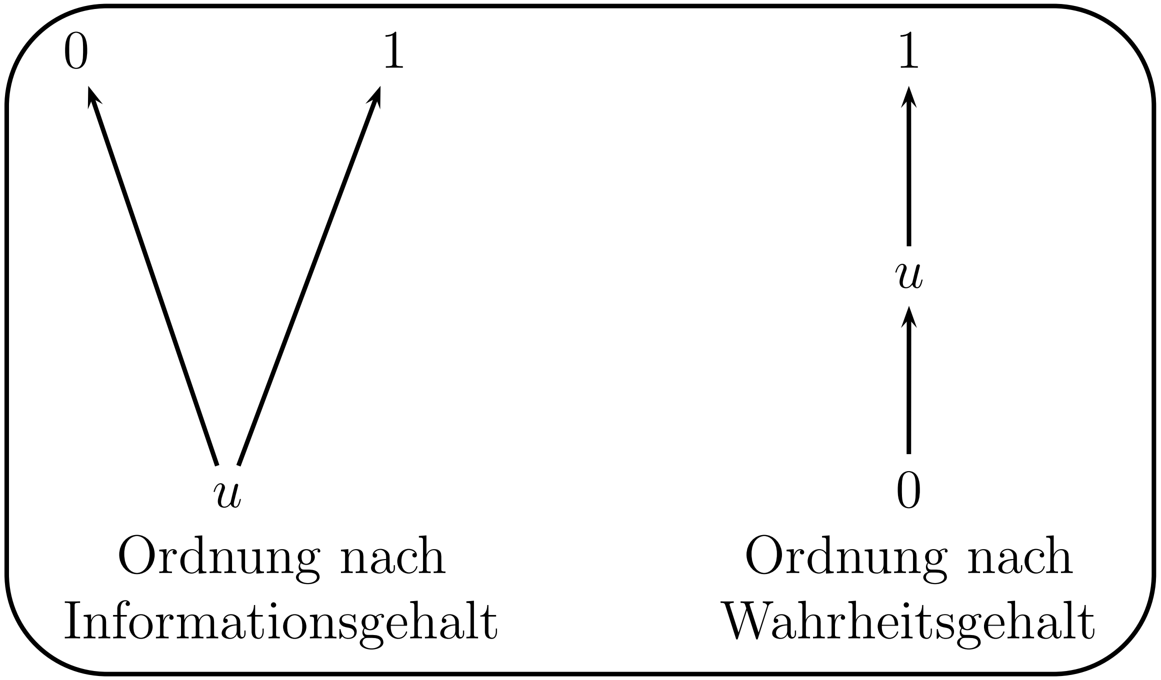
wenn

$$w_j \leq_i u_j$$

für alle $1 \leq j \leq n$.

Ordnung nach Informationsgehalt

Auf Wahrheitswerten ist $\leq_i$ durch die Ordnung nach dem Informationsgehalt gegeben.



Übungsaufgabe

Zeige, daß für jedes $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ die Standardfortsetzung f^* monoton ist.

Lösung

Gilt $f^*(\vec{w}) = u$, dann trivialerweise $f^*(\vec{w}) \leq_i f^*(\vec{v})$ für alle $\vec{v}$.
Sei also nun $f^*(\vec{w}) \neq u$, also $f^*(\vec{w}) \in \{0,1\}$. Dann gilt

$$f^*(\vec{w}) = f(\vec{x}) \qquad \text{für alle } \vec{x} \in U(w)$$

Da $\vec{w} \leq_i \vec{v}$, gilt

$$U(\vec{v}) \subseteq U(\vec{w})$$

Also gilt auch

$$f^*(\vec{v}) = f(\vec{x}) \qquad \text{für alle } \vec{x} \in U(w)$$

und also

$$f^*(\vec{w}) = f^*(\vec{v})$$

Definition: Maximale Monotonie

Eine Funktion $g : \{0, u, 1\}^n \to \{0, u, 1\}$ heißt maximal monoton bzgl. $\leq$, wenn

1. sie monoton bzgl. $\leq$ ist,
2. keine Funktion f_1 mit $f \leq f_1$, $f \neq f_1$ monoton bzgl. $\leq$ ist.

Dabei gilt

$$g_1 \leq g_2$$

gdw.

$$g_1(\vec{w}) \leq g_2(\vec{w}) \qquad \text{für alle } \vec{w}$$

Beispiele

f_1	1	u	0
1	0	u	1
u	u	u	1
0	1	u	1

f_2	1	u	0
1	0	u	1
u	u	u	1
0	1	1	1

f_1 und f_2 sind beide monoton

$f_1 <_i f_2$

f_2 is maximal monoton

Übungsaufgabe

Zeige, daß es für eine Funktion $g : \{0, u, 1\}^n \longrightarrow \{0, u, 1\}$ genau dann eine Funktion $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, so daß g die Standardfortsetzung von f ist, wenn:

1. für alle $\vec{w} \in \{0, 1\}^n$ gilt $g(\vec{w}) \in \{0, 1\}$,
2. g ist maximal monton bezüglich der Ordnung $\leq_i$.

Übungsaufgabe

Lösung

Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen ist klar.

Sei nun eine Funktion g gegeben, die die beiden Bedingungen erfüllt. Dann setzen wir

$$f = g \downarrow \{0,1\}^n.$$

Nach Voraussetzung (1.) gilt dann $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Sei nun $\vec{w} \in \{0,u,1\}^n$ beliebig gewählt.
Wir wollen $f^*(\vec{w}) = g(\vec{w})$ zeigen. Nach Def. von U und $\leq_i$ gilt:

$$U(\vec{w}) = \{\vec{v} \in \{0,1\}^n \mid \vec{w} \leq_i \vec{v}\}$$

Wegen der Monotonie gilt damit für alle $\vec{v} \in U(\vec{w})$

$$g(\vec{w}) \leq_i g(\vec{v}) = f(\vec{v})$$

Übungsaufgabe

Lösung (Fortsetzung)

1. Sei $g(\vec{w}) \in \{0,1\}$. Dann gilt für alle $\vec{v} \in U(\vec{w})$
$$g(\vec{w}) = g(\vec{v}) = f(\vec{v})$$
und also $g(\vec{w}) = f^*(\vec{w})$.
2. Gelte $g(\vec{w}) = u$. Dann muß es $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in U(\vec{w})$ geben, so daß
$$g(\vec{v_1}) \neq g(\vec{v_2})$$
gilt, und also
$$f^*(\vec{w}) = u$$
Wäre das nicht der Fall, müßte für alle $\vec{v} \in U(\vec{w})$ gelten:
$$g(\vec{v}) = a \in \{0,1\}$$

Übungsaufgabe

Lösung (Fortsetzung)

Dann definiert man

$$g_1(\vec{v}) = \begin{cases} g(\vec{v}) & \text{falls } \vec{v} \neq \vec{w} \\ a & \text{falls } \vec{v} = \vec{w} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $g <_i g_1$ und g_1 ist ebenfalls monoton bzgl. $\leq_i$, im Widerspruch zu Bedingung 2.

Alternative Wahrheitswerte

Alternative Bezeichnung der Wahrheitswerte

$$
\begin{array}{lcl}
\{1\} & \stackrel{T}{\Rightarrow} & 1 \\
\{0\} & \stackrel{T}{\Rightarrow} & 0 \\
\{1,0\} & \stackrel{T}{\Rightarrow} & u
\end{array}
$$

Alternative Wahrheitswerte

Für

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

definieren wir

$$f^+ : \{\{1\},\{0\},\{1,0\}\}^n \to \{\{1\},\{0\},\{1,0\}\}$$

als die mengenwertige Fortsetzung von f:

$$f^+(W_1,\ldots,W_n) = \{f(w_1,\ldots,w_n) \mid w_j \in W_j, 1 \leq j \leq n\}$$

Theorem:

$$T(f^+(W_1,\ldots,W_n)) = f^*(T(W_1),\ldots,T(W_n))$$

Beweis

Man sieht leicht, daß für alle $W \subseteq \{0,1\}$, mit $W \neq \emptyset$ gilt

$$W = \{w \in \{0,1\} \mid T(W) \leq_i w\}.$$

Daraus folgt dann

$$U(T(W_1),\ldots,T(W_n)) = \{(w_1,\ldots,w_n) \mid w_j \in W_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

Also gilt

$$f^+(W_1,\ldots,W_n) = \\ \{f(w_1,\ldots,w_n) \mid w_1,\ldots,w_n \in U(T(W_1),\ldots,T(W_n))\}.$$

Hieraus ist jetzt

$$T(f^+(W_1,\ldots,W_n)) = f^*(T(W_1),\ldots,T(W_n))$$

unmittelbar einzusehen.

Anwendungsbeispiel

Aufgabenstellung

Sei $\mathcal{M}$ eine prädikatenlogische, zwei-wertige, Struktur. Man möchte feststellen, ob eine prädikatenlogische Formel A in $\mathcal{M}$ wahr ist.

Beispiel:

$\mathcal{M}_{list}$ sei beschriebene durch

elem.	px	py
u_1	1	0
u_2	0	0
u_3	0	0
u_4	0	0

$n(\_ , \_)$	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	1	0	0
u_2	0	0	1	0
u_3	0	0	0	1
u_4	0	0	0	0

Frage: Gilt für $\beta(v) = u_2$

$$(\mathcal{M}_{list}, \beta) \models \exists v_1 \exists v_2 (n(v_1, v) \wedge n(v_2, v) \wedge v_1 \neq v_2) \quad ?$$

Anwendungsbeispiel

Abstraktion

Sei E eine Kongruenzrelation auf M und $\mathcal{N}$ die folgende dreiwertige Quotientenstruktur von M bzgl. E:

1. $N = \{[m]_E \mid m \in M\}$

2. $$f^{\mathcal{N}}([m_1]_E, \ldots, [m_n]_E) = [f^{\mathcal{M}}(m_1, \ldots, m_n)]_E$$

für alle Funktionszeichen f

($f^{\mathcal{N}}$ is wohldefiniert, da E Kongruenzrelation ist)

Anwendungsbeispiel

Abstraktion (Fortsetzung)

3.

$$p^{\mathcal{N}}([m_1]_E, \ldots, [m_n]_E) = \begin{cases} 0 & \text{falls für alle } a_1 \in [m_1]_E, \ldots, a_n \in [m_n]_E \text{ gilt} \\ & p^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ 1 & \text{falls für alle } a_1 \in [m_1]_E, \ldots, a_n \in [m_n]_E \text{ gilt} \\ & p^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = 1 \\ u & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Pädikatensymbole p.

(NB: Damit gilt für 0-stellige Prädikate p stets $p^{\mathcal{N}} = p^{\mathcal{M}}$)