Anwendungsbeispiel

Lösungsansatz

Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ die Einbettungsfunktion $F(m) = [m]_E$.
Anstelle von

$$(\mathcal{M}, \beta) \models A$$

berechnet man unter der Belegung $F \circ \beta$:

$$v_{\mathcal{N}}(A)$$

Gilt $v_{\mathcal{N}}(A) \in \{0, 1\}$ dann besagt ein mathematisches Resultat, daß A auch in $\mathcal{M}$ falsch bzw. wahr ist.

Aus $v_{\mathcal{N}}(A) = u$ kann man keine Rückschlüsse ziehen.
Man kann dann mit einer anderen Kongruenzrelation E_1 das Verfahren noch einmal versuchen.

Lösungsansatz im Beispiel

$$E_{list}(m_1, m_2) :\Leftrightarrow$$
$$(v_{\mathcal{M}}(px)(m_1) = v_{\mathcal{M}}(px)(m_2)) \text{ und}$$
$$(v_{\mathcal{M}}(py)(m_1) = v_{\mathcal{M}}(py)(m_2))$$

ist eine Kongruenzrelation mit den Klassen
$n_1 = \{u_1\}$ und $n_2 = \{u_2, u_3, u_4\}$.

Die zugehörige Struktur $\mathcal{N}_{list}$ ist

elem.	px	py
n_1	1	0
n_2	0	0

$n(\_\,,\_)$	n_1	n_2
n_1	0	$\frac{1}{2}$
n_2	0	$\frac{1}{2}$

Lösungsansatz im Beispiel

Anstelle von

$$(\mathcal{M}_{list}, \beta) \models \exists v_1 \exists v_2 (n(v_1, v) \wedge n(v_2, v) \wedge v_1 \neq v_2)$$

mit $\beta(v) = u_2$ berechnet man

$$v_{\mathcal{N}_{list}}(\exists v_1 \exists v_2 (n(v_1, v) \wedge n(v_2, v) \wedge v_1 \neq v_2))$$

mit $F(\beta)(v) = n_2$.

Ergebnis:

$$v_{\mathcal{N}_{list}}(\exists v_1 \exists v_2 (n(v_1, v) \wedge n(v_2, v) \wedge v_1 \neq v_2)) = u$$

Besserer Lösungsansatz

Äquivalenzklassen

$$n_1 = \{u_1\} \qquad n_2 = \{u_2\} \qquad n_3 = \{u_3, u_4\}$$

Ein Subsumptionsbegriff

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ dreiwertige Strukturen,
$F : M \to N$ eine surjektive Abbildung.

$\mathcal{M}$ subsumiert $\mathcal{N}$ bzgl F, in Zeichen $\mathcal{M} \sqsubseteq^F \mathcal{N}$, wenn

1. für alle n, alle n-stelligen Funktionszeichen f und alle $a_1, \ldots, a_n \in M$ gilt

$$F(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$$

2. für alle n, alle n-stelligen Prädikatszeichen p und alle $b_1, \ldots, b_n \in M$ gilt:

$$v_{\mathcal{N}}(p(F(b_1), \ldots, F(b_n))) \leq_i v_{\mathcal{M}}(p(b_1, \ldots, b_n))$$

Anwendungsbeispiel

Der mathematische Satz

Theorem:
Sei $\mathcal{L}$ eine Logik, in der alle aussagenlogischen Operatoren Standardfortsetzungen ihrer zweiwertigen Restriktion sind.
Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dreiwertigen Strukturen und $F : M \to N$ eine surjektive Abbildung mit $\mathcal{M} \sqsubseteq^F \mathcal{N}$.

Dann gilt für jede Formel A aus $\mathcal{L}$ und jede Variablenbelegung $\beta : Var \to M$

$$v_{\mathcal{N},F\circ\beta}(A) \leq_i v_{\mathcal{M},\beta}(A)$$