Funktionale Vollständigkeit

Funktionale Vollständigkeit

Definition:

Eine mehrwertige Logik $\mathcal{L}$ mit M als Menge der Wahrheitswerte heißt funktional vollständig, wenn zu jeder Funktion $g : M^n \to M$ eine aussagenlogische Formel A in $\mathcal{L}$ existiert mit $g = f(A)$.

Dabei ist $f(A)$ definiert durch:
$f(A)(w_1, \ldots, w_n)$ ist der Wahrheitswert der Formel A, wenn die aussagenlogischen Variablen mit den Wahrheitswerten $w_1, \ldots, w_n$ belegt sind.

$\mathcal{L}_3$ und Funktionale Vollständigkeit

$\mathcal{L}_3$ ist nicht funktional vollständig.

$\mathcal{L}_3^+$ entsteht aus $\mathcal{L}_3$ durch Hinzunahme einer aussagenlogischen Konstanten u, die stets den Wahrheitswert u annimmt.

Lemma:

Die Logik $\mathcal{L}_3^+$ ist **funktional vollständig**.

Beweis des Lemmas

Sei $g : \{1, u, 0\}^n \to \{1, u, 0\}$ gegeben.

Die Konstruktion der gesuchten aussagenlogischen Formel A geschieht durch Induktion über n.

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Hierbei wird die Existenz der aussagenlogischen Konstanten u und Darstellbarkeit von 0 und 1 benutzt.

Im Induktionsschritt von $n - 1$ nach n gibt es nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{L}_3^+$-Formeln A_0, A_u und A_1 mit:

$$\begin{array}{rcl} f(A_0)(w_1, \ldots, w_{n-1}) & = & g(w_1, \ldots, w_{n-1}, 0) \\ f(A_u)(w_1, \ldots, w_{n-1}) & = & g(w_1, \ldots, w_{n-1}, u) \\ f(A_1)(w_1, \ldots, w_{n-1}) & = & g(w_1, \ldots, w_{n-1}, 1) \end{array}$$

Hilfsformeln

Wir benötigen die folgenden Hilfsformeln:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sim\sim\neg w_n \\ H_u &= \sim w_n \land \sim\neg w_n \\ H_1 &= \sim\sim w_n \end{aligned}$$

Wahrheitstafel für die Hilfsformeln

w_n	H_1	H_u	H_0
1	1	0	0
u	0	1	0
0	0	0	1

Beweis des Lemmas (Forts.)

Setzt man

$$A = (A_0 \wedge H_0) \vee (A_u \wedge H_u) \vee (A_1 \wedge H_1),$$

so erhält man $f(A) = g$.

Beispiel 1

Gegeben zweistellige Funktion g durch:

g	1	u	0
1	0	u	0
u	u	u	u
0	0	u	0

Man erhält leicht:

$$\begin{aligned} g(A,1) &= f(A \wedge \neg A) \\ g(A,u) &= u \\ g(A,0) &= f(A \wedge \neg A) \end{aligned}$$

Beispiel 1 (Fortsetzung)

Somit ergibt sich nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} g(A,B) = f(\ & (A \wedge \neg A \wedge \quad \sim\sim B) \vee \\ & (u \wedge \quad \sim B \wedge \sim\neg B) \vee \\ & (A \wedge \neg A \wedge \quad \sim\sim\neg B)\ ) \end{aligned}$$

Vereinfachungen liefern

$$g(A,B) = f(\ (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)\ )$$

Beispiel 2

Gegeben zweistellige Funktion $\wedge_B$ durch

$\wedge_B$	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	u
0	0	u	0

(Bochvars Konjunktion)

Beispiel 2 (Fortsetzung)

Man erhält nach dem Konstruktionsverfahren:

$$\begin{array}{lll} A \wedge_B B & \text{id} & ((\neg A \wedge A) \wedge \quad (\sim\sim\neg B)) \vee \\ & & (u \wedge \quad (\sim B \wedge \sim\neg B)) \vee \\ & & (A \wedge \quad (\sim\sim B)) \end{array}$$

Vereinfachungen führen zu:

$$A \wedge_B B \quad \text{id} \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)$$

Die Postschen Logiken

Die Postschen Logiken P_m

Operatoren:

$$\vee \quad \text{und} \quad s$$

Wahrheitswerte:

$$\{0, 1, \ldots, m-1\}$$

Wahrheitstabellen:

$$\begin{array}{rcl} a \vee^P b & = & \max(a, b) \\ s^P(a) & = & a - 1 \,(\text{mod } m) \end{array}$$

Hierbei sind $-, \max, \mathrm{mod}\ m$ die Operationen auf den natürlichen Zahlen in ihrer üblichen Bedeutung.

Menge der ausgezeichneten Wahrheitswerte: $\quad D = \{m-1\}$

Lemma

Die folgenden Funktionen sind in P_m definierbar:

$$
\begin{array}{rcl}
x - k & = & \underbrace{s \ldots s}_{k \text{ mal}}(x) \pmod{m} \\
\max(x_1, \ldots, x_r) & = & x_1 \vee \ldots \vee x_r \\
x + k & = & x - (m - k) \pmod{m} \\
T(x) = m - 1 & = & \max(x, s(x), s^2(x), \ldots, s^{m-1}(x))
\end{array}
$$

Wir schreiben vereinfachend

$$
\begin{array}{lcl}
a - b & \text{anstelle von} & a - b \pmod{m} \\
a + b & \text{anstelle von} & a + b \pmod{m}
\end{array}
$$

Vorbereitungen

Wir definieren:

$$J_k(x) = \begin{cases} m-1 & \text{falls } x = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Identifiziert man $\{0, u, 1\}$ mit $\{0, 1, 2\}$, dann gilt

$$J_0 = H_0, \quad J_1 = H_u, \quad J_2 = H_1$$

Einfaches Kriterium

Eine m-wertige Logik, in der die Funktionen

- $\min(x, y)$
- $\max(x, y)$
- $J_k(x)$ für $0 \leq k < m$
- alle konstanten Funktionen $c_k^n(x_1, \ldots, x_n) = k$ für $n \geq 1$ und jeden Wahrheitswert k, $0 \leq k < m$

definierbar sind, ist funktional vollständig.

Beweis:
Sei $g(\bar{x}) : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ gegeben

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n) &= \max\{\min(c^n_{g(\bar{a})}, J_{a_1}(x_1), \ldots, J_{a_n}(x_n)) \\ &\qquad \mid \bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M}^n\} \end{aligned}$$

Lemma: Einstellige Funktionen

Für jedes m ist jede einstellige Funktion $g(x)$ in der Postschen Logik P_m definierbar.

Beweis:

Wir zeigen die Definierbarkeit der Funktionen

$$T_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq m-1 \\ k & \text{falls } x = m-1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$g(n) \quad = \quad \max(T_{g(m-1)}(n), \ldots, T_{g(0)}(n+m-1))$$

Die Funktion $T_k(x)$

$$T_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq m-1 \\ k & \text{falls } x = m-1 \end{cases}$$

is definierbar durch

$$T_k(x) = \max(\max[T(x) - 1, x] - m + 1, x + k) - m + 1$$

Beweis

Für $x = m - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} & T_k(m-1) \\ = \quad & \max(\max(m-2, m-1) - m + 1, m - 1 + k) - m + 1 \\ = \quad & \max(0, m - 1 + k) - m + 1 \\ = \quad & m - 1 + k - m + 1 \\ = \quad & k \end{aligned}$$

Die Funktion $T_k(x)$

$$T_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq m-1 \\ k & \text{falls } x = m-1 \end{cases}$$

is definierbar durch

$$T_k(x) = \max(\max[T(x) - 1, x] - m + 1, x + k) - m + 1$$

Beweis

Für $x < m - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} &= \max(\max(m-2, x) - m + 1, x + k) - m + 1 \\ &= \max(m - 2 - m + 1, x + k) - m + 1 \\ &= \max(m - 1, x + k) - m + 1 \\ &= m - 1 - m + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beweis (Forts.)

Es gilt

$$g(n) \quad = \quad \max\{T_{g(m-i-1)}(n+i) \mid 0 \leq i < m\}$$

Zum Nachweis dieser Gleichung beachte man, daß für jedes $n \in \mathcal{M}$ und jedes i mit $0 \leq i < m$ gilt:

$$T_{g(m-i-1)}(n+i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n+i \neq m-1 \\ g(n) & \text{falls } n+i = m-1 \end{cases}$$

Funktionale Vollständigkeit von P_m

Theorem:
Die m-wertige Postsche Logik P_m ist funktional vollständig.

Beweis:

Die (einstellige) Funktion $m - x$ ist P_m-definierbar

Damit auch

$$\min(x, y) = m - 1 - \max(m - 1 - x, m - 1 - y)$$

Alle $J_k(x)$ sind einstellig und also definierbar

Die einstelligen konstanten Funktionen sind definierbar und damit auch die mehrstelligen.

Damit sind alle Voraussetzung des Kriteriums gegeben