Kalküle

Ein 1. Axiomatisierungsresultat

Satz: [M. Wajsberg 1931]

Sei $\mathcal{L}^3_{\text{Łukas}}$ die Aussagenlogik mit den Konnektoren

- $\neg$ (starke Negation) und
- $\Rightarrow$ (Łukasiewicz Implikation).

Mit der Modus-ponens-Regel bilden folgenden Axiome eine vollständige und korrekte Axiomatisierung für $\mathcal{L}^3_{\text{Łukas}}$:

1. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
4. $((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Łukasiewicz Implikation $\Rightarrow$

$A \Rightarrow B$			
$B \downarrow A \rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	1	1
0	0	u	1

Zum Vergleich die schwache ($\supset$) und die starke ($\rightarrow$) Implikation.

$\supset$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	1	1
0	0	1	1

$\rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	u	u	1
0	0	u	1

Vorzeichenformeln

Definition

Ist $\mathcal{L}$ eine beliebige mehrwertige Logik mit M als Menge der Wahrheitswerte, so ist eine Vorzeichenformel für $\mathcal{L}$ von der Form

$$S\ A$$

wobei A eine Formel in $\mathcal{L}$ ist und S eine nichtleere Teilmenge von M.

Eine Vorzeichenformel ohne freie Variablen $S\ A$ ist in einer $\mathcal{L}_3$-Struktur $(\mathcal{M}, v)$ gültig, wenn der Wahrheitswert von A in S liegt.

In Zeichen:

$$(\mathcal{M}, v) \models S\ A, \text{ genau dann, wenn } v(A) \in S.$$

Allgemeine Form einer Tableauregel

Zu jedem Vorzeichen $\emptyset \neq S \subseteq M$ und jedem aussagenlogischen Operator $\circ$ gibt es eine Tableauregel.

Sei nun $\circ$ ein n-stelliger Operator, für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Die zugehörige Tableauregel hat dann die Form

$$\frac{S \circ (A_1, \ldots, A_n)}{T(A_1, \ldots, A_n)}$$

wobei $T(A_1, \ldots, A_n)$ ein endliches erweitertes Tableau ist, in dem nur Vorzeichenformeln der Form $S'_i A_i$ auftreten.

Die Zweige des Tableaus $T(A_1, \ldots, A_n)$ nennt man die Extensionen der Regel.

Beispiel einer Tableauregel

Eine Tableauregel aus der 5-wertigen Łukasiewicz Logik mit der Wahrheitswertemenge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \multicolumn{5}{c}{\{4\}(p \Rightarrow q)} \\ \hline \{0\}p & \{0,1\}p & \{0,1,2\}p & \{0,1,2,3\}p & \\ & \{1,2,3,4\}q & \{2,3,4\}q & \{3,4\}q & \{4\}q \end{array}$$