Ein Beispieltableau

Sei t ein Term, dessen einzige Variable y ist. Dann ist

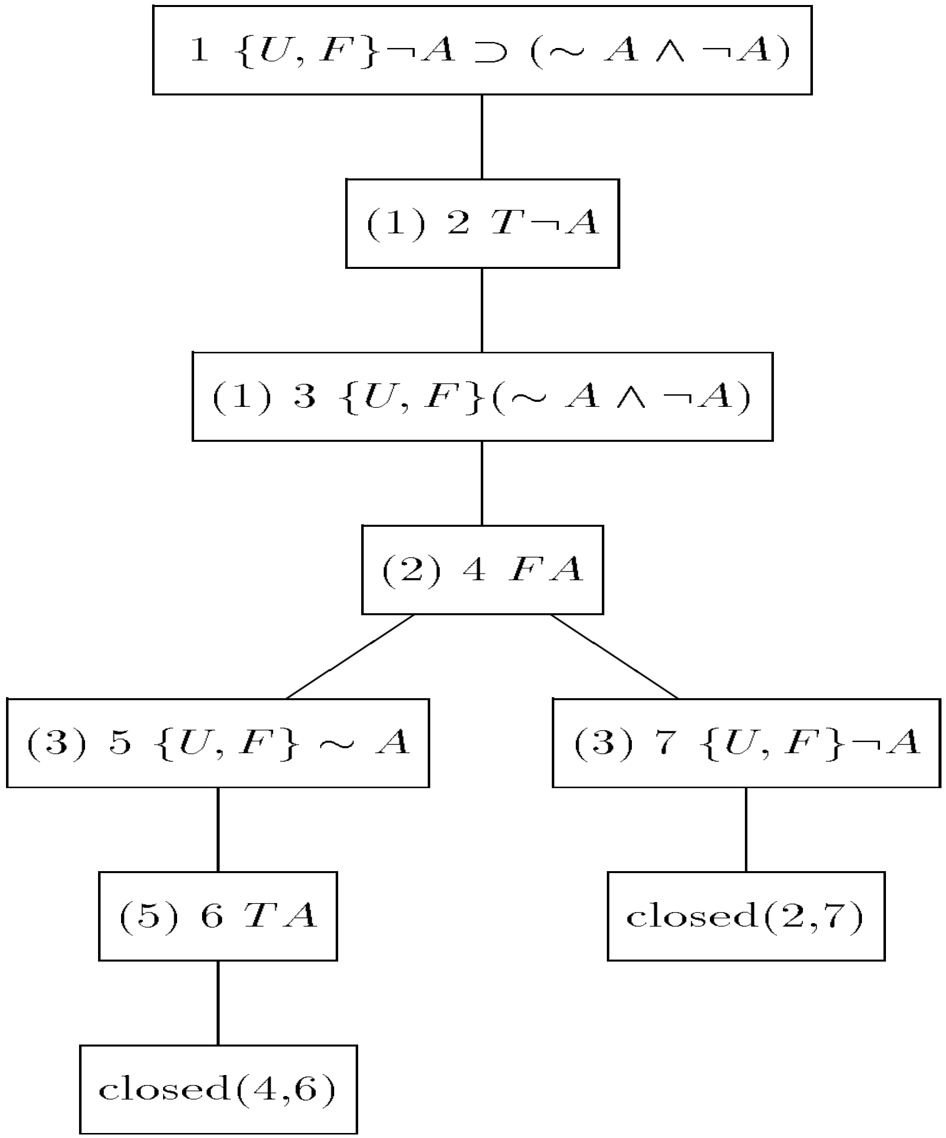
$$C \quad = \quad (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1 $\{U, F\}C$ (Start)
- 2 $\{T\}\forall x Q(x)$ (aus 1)
- 3 $\{U, F\}\forall y Q(t(y))$ (aus 1)
- 4 $\{T\}Q(z_1)$ (aus 2)
- 5 $\{U, F\}Q(t(c))$ (aus 3)

Der einzige Zweig dieses Tableaus kann mit der Substitution $\{z_1 \to t(c)\}$ geschlossen werden (mit 4 und 5)

Ein verzweigendes Tableau



Die Junktoren $cand$ und cor

A $cand$ B			
B ↓ A →	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	0
0	0	u	0

A cor B			
B ↓ A →	1	u	0
1	1	u	1
u	1	u	u
0	1	u	0

Diese Junktoren werden in dem Buch von D. Gries *The Science of Programming* (S. 69) definiert und sind dort Bestandteil einer dreiwertigen Logik zur Programmverifikation.

Bewerkenswert ist die Asymmetrie der beiden Konnektoren, die eine dreiwertige Version der Konjunktion bzw. Disjunktion sein sollen.

Übungsaufgabe

Welche Tableauregeln müßte man für $cand$, cor hinzunehmen, um einen korrekten und vollständigen Tableaukalkül zu erhalten?

Lösung: Regeln für $cand$

$$\frac{\{T\}A \; cand \; B}{\begin{array}{c}\{T\}A \\ \{T\}B\end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \; cand \; B}{\begin{array}{c|c}\{F\}A & \{F\}B \\ & \{T\}A\end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \; cand \; B}{\begin{array}{c|c}\{U\}A & \{T\}A \\ & \{U\}B\end{array}}$$

$$\frac{\{F,U\}A \; cand \; B}{\begin{array}{c|c}\{F,U\}A & \{F,U\}B\end{array}}$$

Lösung: Regeln für cor

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\{T\}A\ cor\ B} \\ \hline \{T\}A & \{T\}B \\ & \{F\}A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \{F\}A\ cor\ B \\ \hline \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\{U\}A\ cor\ B} \\ \hline \{U\}A & \{F\}A \\ & \{U\}B \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\{F,U\}A\ cor\ B} \\ \hline \{U\}A & \{F\}A \\ & \{U,F\}B \end{array}$$

Übungsaufgabe

Die $\circ$ sei definiert durch:

$A \circ B$			
B $\downarrow$ A $\rightarrow$	1	u	0
1	1	1	1
u	1	1	0
0	1	1	1

Diese Wahrheitstafel ist interessant, da die Tautologien, die ausschließlich mit $\circ$ aufgebaut sind, nicht durch ein endliches Hilbertsystem axiomatisiert werden können.

[A. Urquhart 1986, Seite 85]

Geben Sie die Tableauregeln für $\circ$ und die Vorzeichen $\{T\}, \{F\}, \{U\}, \{U, F\}$ an.

Lösung: Regeln für $\circ$

$$\frac{\{T\}A \circ B}{\{T\}A \;\Big|\; \{U\}A \;\Big|\; \begin{array}{c}\{F\}A\\ \{T\}B\end{array} \;\Big|\; \begin{array}{c}\{F\}A\\ \{F\}B\end{array}}$$

Für $\{U\}A \circ B$ gibt es keine Regel

$$\frac{\{F\}A \circ B}{\begin{array}{c}\{F\}A\\ \{U\}B\end{array}}$$

$$\frac{\{U,F\}A \circ B}{\begin{array}{c}\{F\}A\\ \{U\}B\end{array}}$$