Anwendungsgebiete mehrwertiger Logik

Anwendungsgebiete

- Unabhängigkeitbeweise,
- Modellierung undefinierter Funktions- und Prädikatswerte in der Spezifikation und Verifikation von Programmen,
- Semantik natürlicher Sprache, z.B. zur Modellierung von Präsuppositionen,
- in der Theorie der logischen Programmierung zur deklarativen Beschreibung der operationalen Semantik der Negation,
- Modellierung elektronischer Schaltkreise,
- zur Modellierung von Vagheit und Unbestimmtheit, z.B. in der Theorie der Intervallarithmetik.

Das Axiomensystem K_1

Ax1	$p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1)$
Ax2	$((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_1) \Rightarrow p_1$
Ax3	$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow ((p_2 \Rightarrow p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3))$
Ax4	$(p_1 \land p_2) \Rightarrow p_1$
Ax5	$(p_1 \land p_2) \Rightarrow p_2$
Ax6	$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow ((p_1 \Rightarrow p_3) \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \land p_3))$
Ax7	$p_1 \Rightarrow (p_1 \lor p_2)$
Ax8	$p_2 \Rightarrow (p_1 \lor p_2)$
Ax9	$(p_1 \Rightarrow p_3) \Rightarrow ((p_2 \Rightarrow p_3) \Rightarrow p_1 \lor p_2 \Rightarrow p_3))$
Ax10	$(p_1 \approx p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_2)$
Ax11	$(p_1 \approx p_2) \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1)$
Ax12	$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow ((p_2 \Rightarrow p_1) \Rightarrow p_1 \approx p_2))$
Ax13	$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (\neg p_2 \Rightarrow \neg p_1)$
Ax14	$p_1 \Rightarrow \neg\neg p_1$
Ax15	$\neg\neg p_1 \Rightarrow p_1$

Axiomensystem K_1

Die Axiome Ax1 bis Ax15 zusammen mit der Modus-ponens-Regel

$$\frac{H, H \Rightarrow G}{G}$$

bilden ein vollständiges Axiomensystem für die klassische Aussagenlogik.

Unabhängigkeit

Ein Axiomensystem $\mathbf{K}$ heißt unabhängig, wenn für jedes Axiom $A \in \mathbf{K}$, in der Ableitungsrelation $\vdash_{\mathbf{K}\setminus\{A\}}$, die durch dieselben Regeln und die um A verminderte Axiomenmenge von $\mathbf{K}$ gegeben ist, die Formel A nicht herleitbar ist, d.h.

$$\not\vdash_{\mathbf{K}\setminus\{A\}} A.$$

Wir zeigen exemplarisch, daß Ax2 unabhängig ist von den restlichen Axiomen in $\mathbf{K}_1$.

Beweisansatz

Wir suchen nach einer Eigenschaft E, so daß:

- alle Axiome in $\mathbf{K}_1$ außer Ax2 besitzen die Eigenschaft E,
- Ax2 besitzt nicht die Eigenschaft E,
- besitzen H und $H \Rightarrow G$ die Eigenschaft E, dann besitzt auch G die Eigenschaft E.

Hier definieren wir E durch:

Eine Formel A hat Eigenschaft E, wenn A eine Tautologie in der dreiwertigen Logik $L_{\mathbf{K}_1}$ ist.

Die Logik L_{K_1}

$\Rightarrow$	1	u	0
1	1	u	0
u	1	1	u
0	1	1	1

$\approx$	1	u	0
1	1	u	0
u	u	1	u
0	0	u	1

p	$\neg p$
1	0
u	u
0	1

$\wedge$	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	0
0	0	0	0

$\vee$	1	u	0
1	1	1	1
u	1	u	u
0	1	u	0

Ax1 ist eine L_{K_1}-Tautologie

Angenommen es gäbe eine Belegung v, so daß $v(Ax1)$ kein ausgezeichneter Wahrheitswert ist, d.h. $v(Ax1) \in \{u, 0\}$.

Die Wahrheitstabelle für $\Rightarrow$ zeigt, daß es hierfür zwei Möglichkeiten gibt:

$v(p_1) = u$ und $v(p_2 \Rightarrow p_1) = 0$

aus $v(p_2 \Rightarrow p_1) = 0$ folgt $v(p_1) = 0$ und $v(p_2) = 1$ Widerspruch

oder

$v(p_1) = 1$ und $v(p_2 \Rightarrow p_1) \in \{u, 0\}$

aus $v(p_2 \Rightarrow p_1) \in \{u, 0\}$ folgt $v(p_1) \in \{u, 0\}$ Widerspruch

Ax2 ist keine L_{K_1}-Tautologie

p_1	p_2	$p_1 \Rightarrow p_2$	$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_1$	Ax2
1	1	1	1	1
1	u	u	1	1
1	0	0	1	1
u	1	1	u	1
u	u	1	u	1
u	0	u	1	u
0	1	1	0	1
0	u	1	0	1
0	0	1	0	1

zu Erinnerung: Ax2 = $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_1) \Rightarrow p_1$.

Modus Ponens erhält Eigenschaft

Zu zeigen:
Modus Ponens erhält $L_{\mathbf{K}_1}$-Tautologieeigenschaft

$$\frac{H, H \Rightarrow G}{G}$$

Ist $v(H) = 1$, so folgt aus der Wahrheitstafel für $\Rightarrow$,
daß $v(H \Rightarrow G) = 1$ nur gelten kann, wenn auch $v(G) = 1$.

VDM

VDM (Vienna Development Method) ist eine Methode zur formalen Spezifikation und Entwicklung von Systemen.

Korrespondenz der VDM-Logik mit $\mathcal{L}_3$	
VDM (nach Jones90)	$\mathcal{L}_3$
$true$	1
$*_{\mathbb{B}}$	u
$false$	0
$\wedge, \vee$	$\wedge, \vee$ min, max
$\neg$	$\neg$ starke Negation
$\Rightarrow$	$\rightarrow$ starke Implikation
$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$ starke Äquivalenz

Dreiwertige Gleichheit in VDM

$A =_3 B$	$B \in \mathbb{N}$	$B \equiv *_{\mathbb{N}}$
$A \in \mathbb{N}$	$A = B$	$*_{\mathbb{B}}$
$A \equiv *_{\mathbb{N}}$	$*_{\mathbb{B}}$	$*_{\mathbb{B}}$

Zum Universum $\mathbb{N}$ der wird das Element $*_{\mathbb{N}}$ hinzugenommen.

Außerdem wird ein neues Element $*_{\mathbb{B}}$ zur Menge $\mathbb{B}$ der Boolschen Werte hinzugefügt.

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \begin{cases} \text{das kleinste } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \times m \geq n & m \neq 0 \\ *_{\mathbb{N}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[n - m] = \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m \\ *_{\mathbb{N}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Logik mit partiellen Funktionen

Die Formel

$$\forall n, m([\frac{n}{m}] = [m - n] \to 5n = 5m^2 - 5nm)$$

hat in der klassischen Logik den Wahrheitswert 0,
denn für $m = 0$ und $n = 1$ ist die Prämisse der Implikation wahr, da ja

$$[\frac{1}{0}] = *_{\mathbb{N}} = [0 - 1]$$

Aber die rechte Seite der Implikation führt zu der Ungleichung

$$5 \neq 0$$

In VDM erhält sie den Wahrheitswert $u = *_{\mathbb{B}}$.

Logik mit partiellen Funktionen

Hat umgekehrt eine Implikation

$$\forall \vec{n}(f_1(\vec{n}) = f_2(\vec{n}) \Rightarrow g_1(\vec{n}) = g_2(\vec{n}))$$

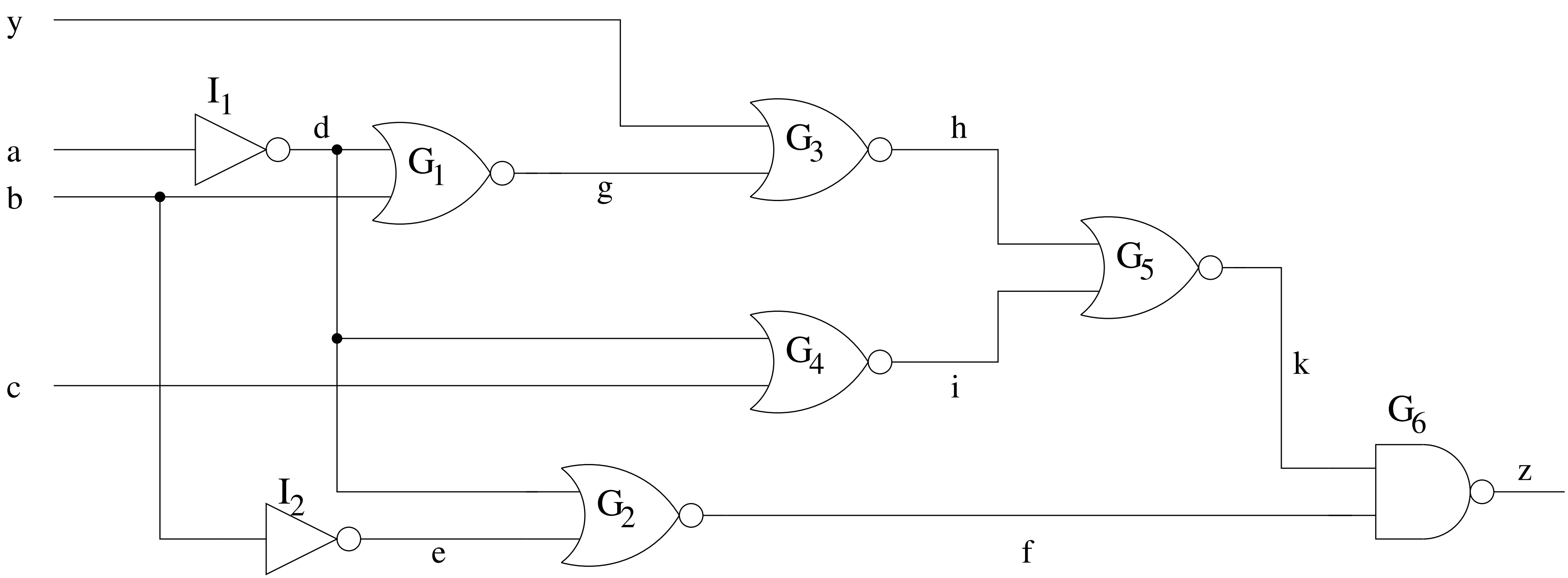
den Wahrheitswert u, so gilt immer noch für alle $\vec{n}$, für die alle $f_i(\vec{n})$ und $g_i(\vec{n})$ definiert sind

$$f_1(\vec{n}) = f_2(\vec{n}) \rightarrow g_1(\vec{n}) = g_2(\vec{n})$$

im 2-wertigen Sinn.

Kombinatorischer Schaltkreis

Beispiel



Die Logik $\mathcal{L}_D^4$

Die vierwertige Logik $\mathcal{L}_D^4$ besitzt die Wahrheitswerte

$$\{1, 0, D, \overline{D}\}$$

Semantik:

Sei C ein Schaltkreis und FM ein Fehlermodell. Leitungen a der Schaltung C werden als logische Variable aufgefasst.
$a_C \in \{0, 1\}$ sei der Wert von a bei korrekter Schaltung C,
$a_F \in \{0, 1\}$ sei der Wert von a in C mit Fehler FM.
Der Wahrheitswert in $\mathcal{L}_D^4$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_4 &= 1 \text{ falls } a_C = 1 \text{ und } a_F = 1\\
a_4 &= 0 \text{ falls } a_C = 0 \text{ und } a_F = 0\\
a_4 &= D \text{ falls } a_C = 1 \text{ und } a_F = 0\\
a_4 &= \overline{D} \text{ falls } a_C = 0 \text{ und } a_F = 1
\end{aligned}$$

Wahrheitstabellen für $\mathcal{L}_D^4$

$NAND$	0	1	D	$\overline{D}$
0	1	1	1	1
1	1	0	$\overline{D}$	D
D	1	$\overline{D}$	$\overline{D}$	1
$\overline{D}$	1	D	1	D

NOR	0	1	D	$\overline{D}$
0	1	0	$\overline{D}$	D
1	0	0	0	0
D	$\overline{D}$	0	$\overline{D}$	0
$\overline{D}$	D	0	0	D

X	0	1	D	$\overline{D}$
$NOTX$	1	0	$\overline{D}$	D

Beschreibung des Schaltkreises

durch Boolesche Gleichungen

$$
\begin{array}{lcl}
d & = & \neg a \\
e & = & \neg b \\
f & = & \neg(d \vee e) \\
g & = & \neg(d \vee b)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
h & = & \neg(y \vee g) \\
i & = & \neg(d \vee c) \\
k & = & \neg(h \vee i) \\
z & = & \neg(f \wedge k)
\end{array}
$$

Testgenerierung

$\mathcal{L}_D^4$-Gleichungen zur Testgenerierung

$$
\begin{array}{lccl}
\{1,0,D,\overline{D}\} & e & = & \neg b \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & f & = & \neg(d \vee e) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & g & = & \neg(d \vee b) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & h & = & \neg(y \vee g) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & i & = & \neg(d \vee c) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & k & = & \neg(h \vee i) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & z & = & \neg(f \wedge k)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\{1\}a \\
\{1,0\}b \\
\{1,0\}c \\
\{1,0\}y \\
\{D,\overline{D}\}z \\
\{\overline{D}\}d
\end{array}
$$

Beobachtung

Die Testmuster für einen kombinatorischen Schaltkreis

mit einem Fehler

sind genau

die erfüllenden Belegungen des zugehörigen $\mathcal{L}_D^4$-Gleichungssystems.