# Unendlichwertige Logiken

# Łukasiewicz Logiken

$$\mathcal{L}^{n}_{\textit{Łukas}}$$

für $n \geq 2$ und $n = \aleph_0, \aleph_1$

Menge $W_n$ der Wahrheitswerte

$$\begin{array}{lcll}
W_n & = & \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1\} & n \in \mathbb{N} \\
W_n & = & \text{das rationale Intervall } [0,1] & n = \aleph_0 \\
W_n & = & \text{das reelle Intervall } [0,1] & n = \aleph_1
\end{array}$$

# Łukasiewicz Logiken (2)

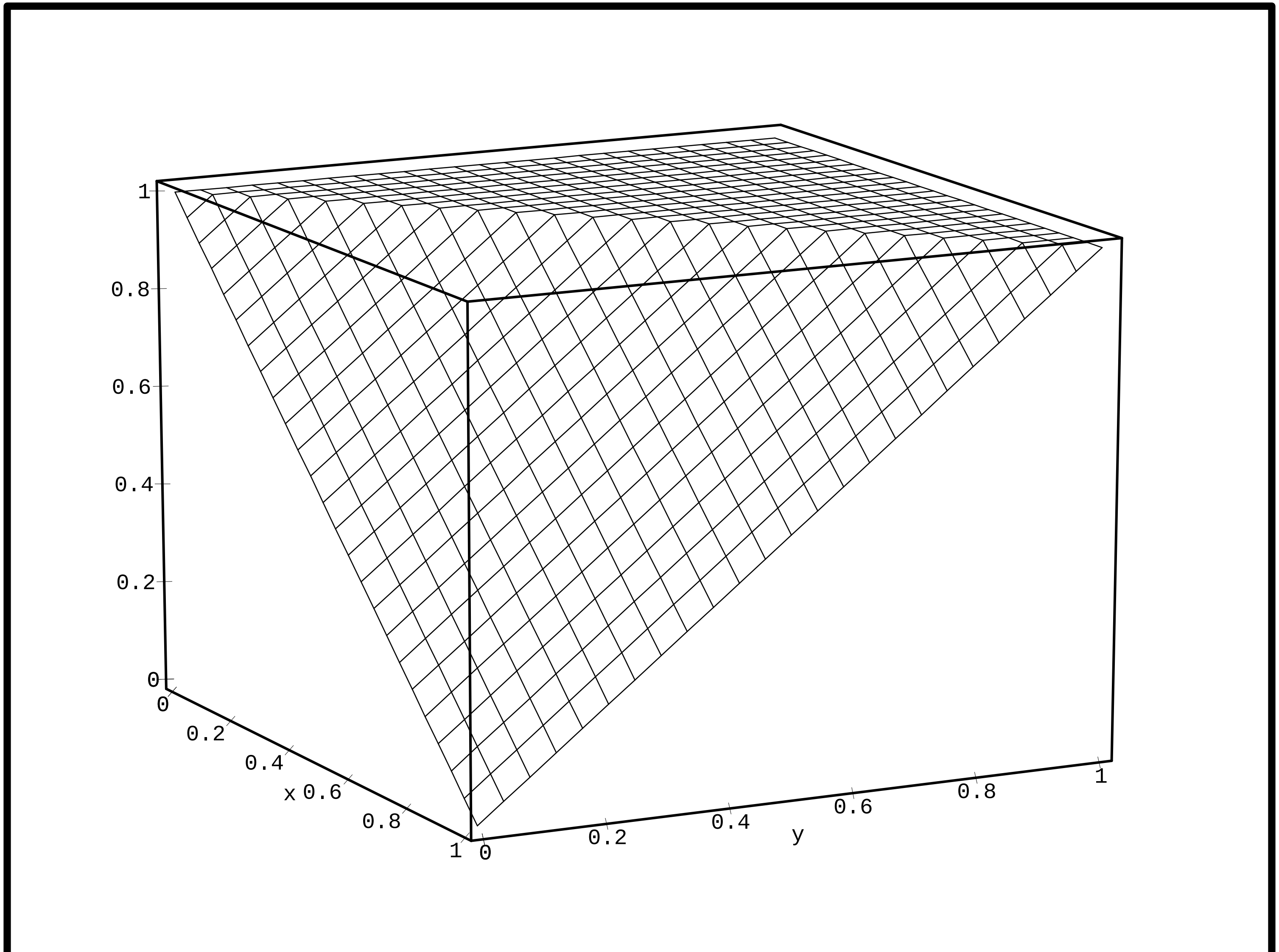
Vokabular: $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee, \equiv$

Ausgezeichneter Wahrheitswert: $1$

$$
\begin{array}{lcl}
\neg A & = & 1 - A \\
A \Rightarrow B & = & min\{1, 1 - A + B\} \\
A \vee B & = & max\{A, B\} \\
A \wedge B & = & min\{A, B\} \\
A \equiv B & = & 1 - \mid A - B \mid
\end{array}
$$

$Taut(\mathcal{L}^n_{\textit{Łukas}}) =$ Menge der Tautologien in $\mathcal{L}^n_{\textit{Łukas}}$

# Łukasiewicz Implikation



# Wahrheitstabellen: Vergleich

| $A \supset B$ | | | |
|---|---|---|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | $1$ | $u$ | $0$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $u$ | $u$ | $1$ | $1$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $1$ |

| $A \rightarrow B$ | | | |
|---|---|---|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | $1$ | $u$ | $0$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $u$ | $u$ | $u$ | $1$ |
| $0$ | $0$ | $u$ | $1$ |

| $A \Rightarrow B$ | | | |
|---|---|---|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | $1$ | $u$ | $0$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $u = \left(\frac{1}{2}\right)$ | $u$ | $1$ | $1$ |
| $0$ | $0$ | $u$ | $1$ |

# Eigenschaften von $Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}})$

- ist $(m-1)$ ein Teiler von $(n-1)$

  dann gilt

  $Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \subseteq Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Łukas}})$

  (Die Umkehrung wird später gezeigt)

- $Taut(\mathcal{L}^{\aleph_0}_{\text{Łukas}}) = Taut(\mathcal{L}^{\aleph_1}_{\text{Łukas}})$

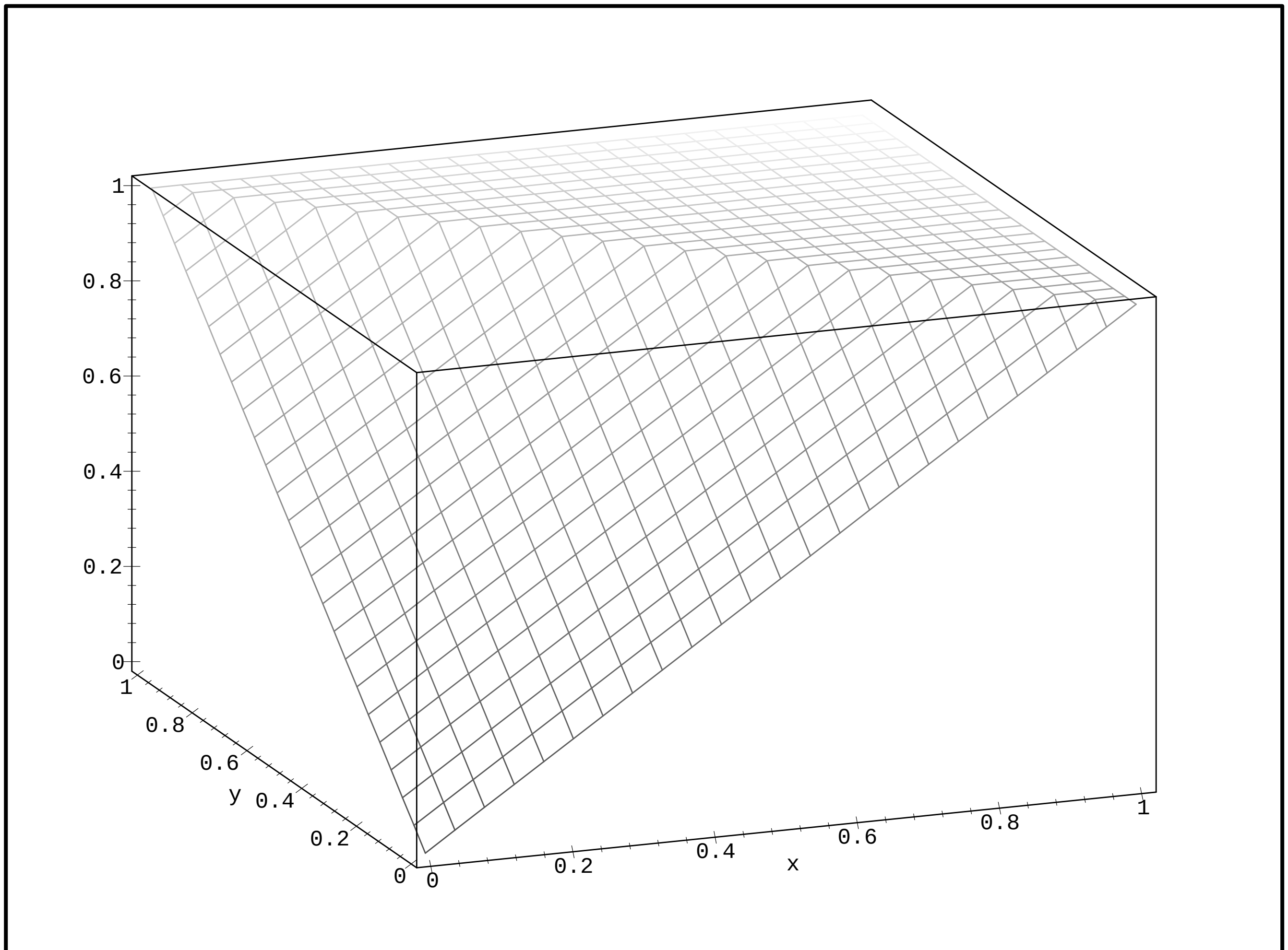
- $Taut(\mathcal{L}^{\aleph_0}_{\text{Łukas}}) = \bigcap\{Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \mid n \geq 2, n \in \mathbb{N}\}$

# Definierte Operatoren in $\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}$

$$
\begin{aligned}
A \sqcup B &= \neg A \Rightarrow B &&= min\{1, A+B\} \\
A \sqcap B &= \neg(\neg A \sqcup \neg B) &&= max\{0, A+B-1\}
\end{aligned}
$$

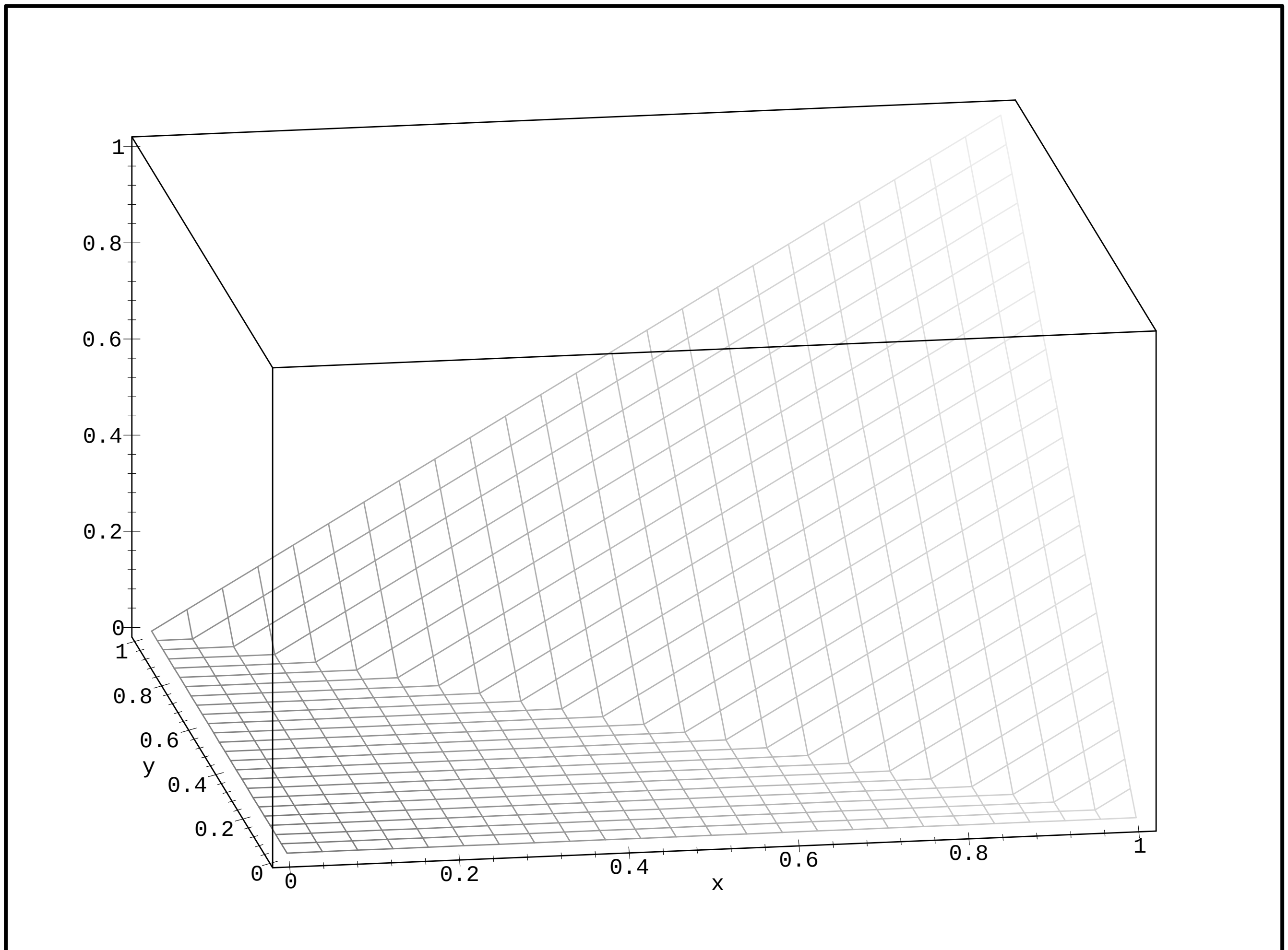
# Der Operator $\sqcup$

$$A \sqcup B = min\{1, A + B\}$$



# Der Operator $\sqcap$

$$A \sqcap B = max\{0, A + B - 1\}$$



# Iterierte Operatoren

$$\bigsqcup^m A \;=\; \underbrace{A \sqcup A \sqcup \ldots \sqcup A}_{m \text{ mal}}$$

$$\bigsqcap^m A \;=\; \underbrace{A \sqcap A \sqcap \ldots \sqcap A}_{m \text{ mal}}$$

Es gilt:

- $\bigsqcup^m A = min(1, mA)$
- $\bigsqcap^m A = 1 - min(1, m(1 - A))$

# Behauptung

Die Formel

$$B^m(A) \quad = \quad \sqcup^m A \Rightarrow \sqcup^{m-1} A$$

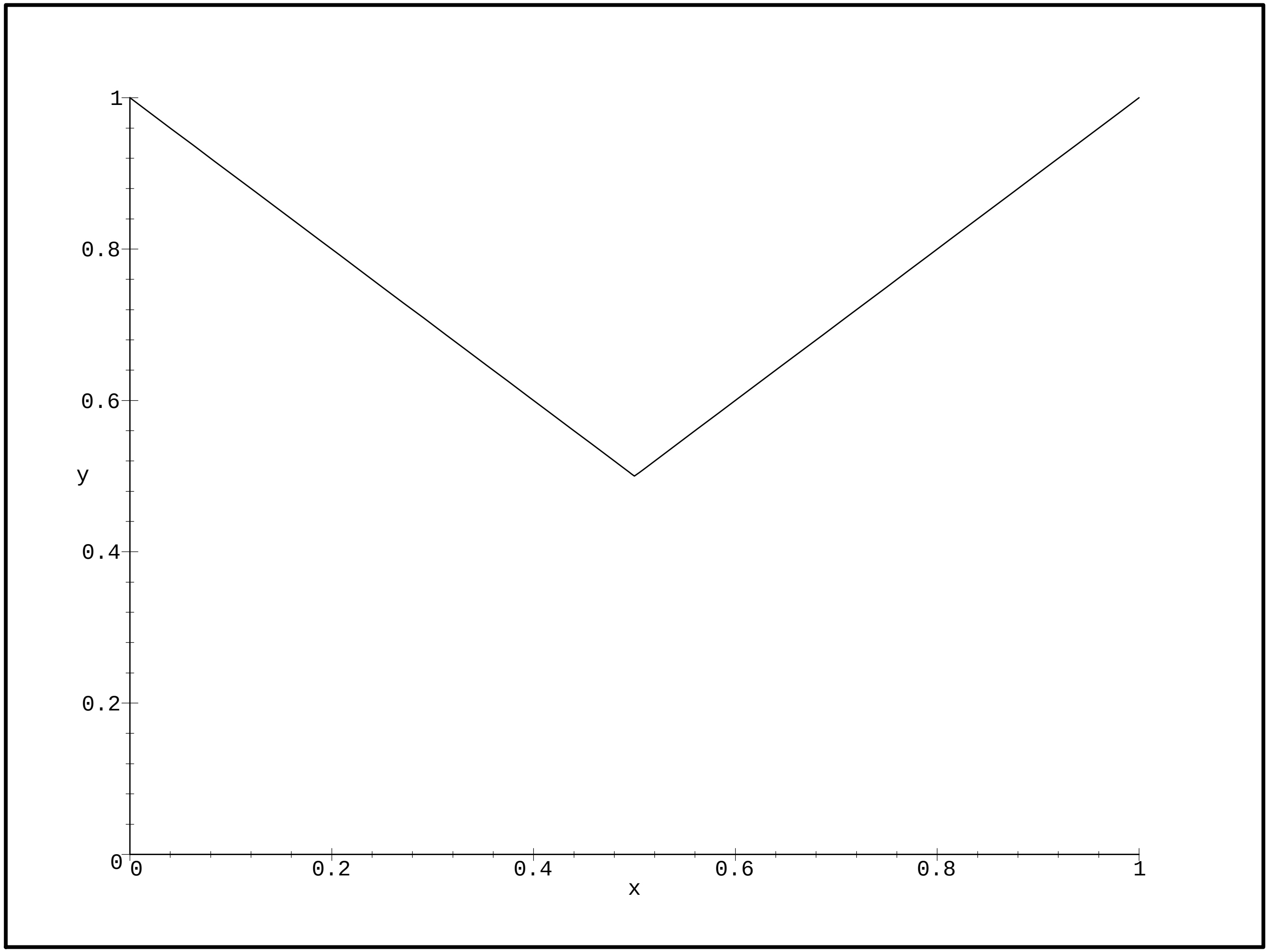
ist eine Tautologie in der Logik $\mathcal{L}^n_{\textit{Łukas}}$

gdw

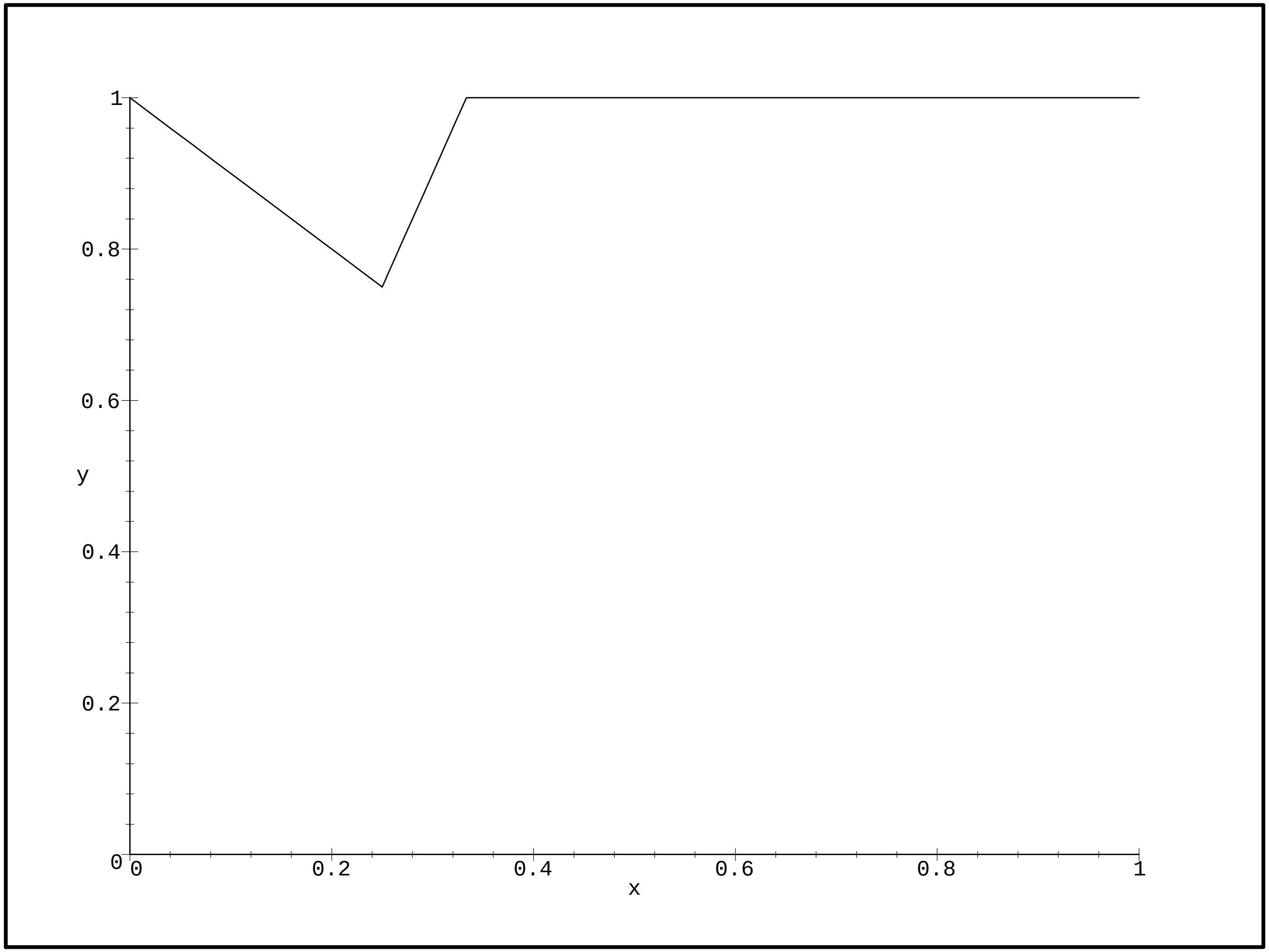
$$n \leq m.$$

Wir betrachten zunächst zwei Beispiele:

$$B^2 = A \sqcup A \Rightarrow A, \quad m = 2$$



$$B^4 = \bigsqcup^4 A \Rightarrow \bigsqcup^3 A, \quad m = 4$$



# Beweis

$$\bigsqcup^{m} A \Rightarrow \bigsqcup^{m-1} A = 1 \text{ in } \mathcal{L}^{n}_{\text{Łukas}} \quad (A \in W_n)$$

gdw

$$min\{1, 1-u+w\} = 1$$

mit $u = min\{1, m \cdot A\}, w = min\{1, (m-1) \cdot A$

gdw

$$min\{1, m \cdot A\} \leq min\{1, (m-1) \cdot A\}$$

gdw

$(m-1) \cdot A \geq 1$ und $A > 0$ oder $A = 0$

gdw

$A \geq \frac{1}{m-1}$ und $A > 0$ oder $A = 0$

gdw

$$n \leq m$$

# Behauptung

Aus

$$Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \subseteq Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Łukas}})$$

folgt $n \geq m$.

# Beweis

Wie gesehen gilt: $B^m(A) \in \mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}$ gdw $n \leq m$

Aus $Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \subseteq Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Łukas}})$ folgt $n \geq m$.

weil anderenfalls

$$B^n(A) \in Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \quad \text{und} \quad B^n(A) \not\in Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Łukas}})$$

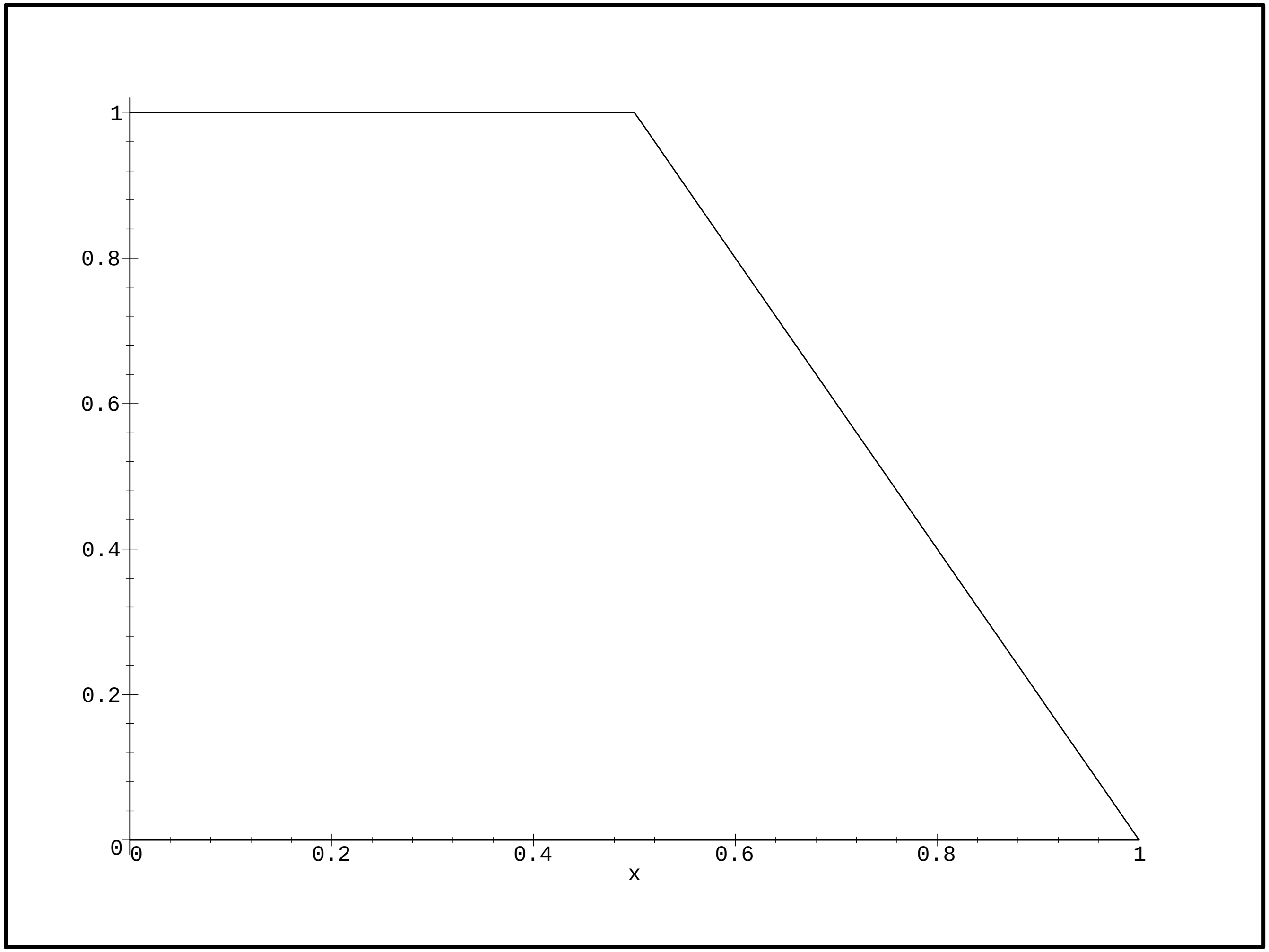
# Behauptung

In $\mathcal{L}^n_{Łukas}$ gilt für jede Belegung $v : AL_{var} \to W_n$

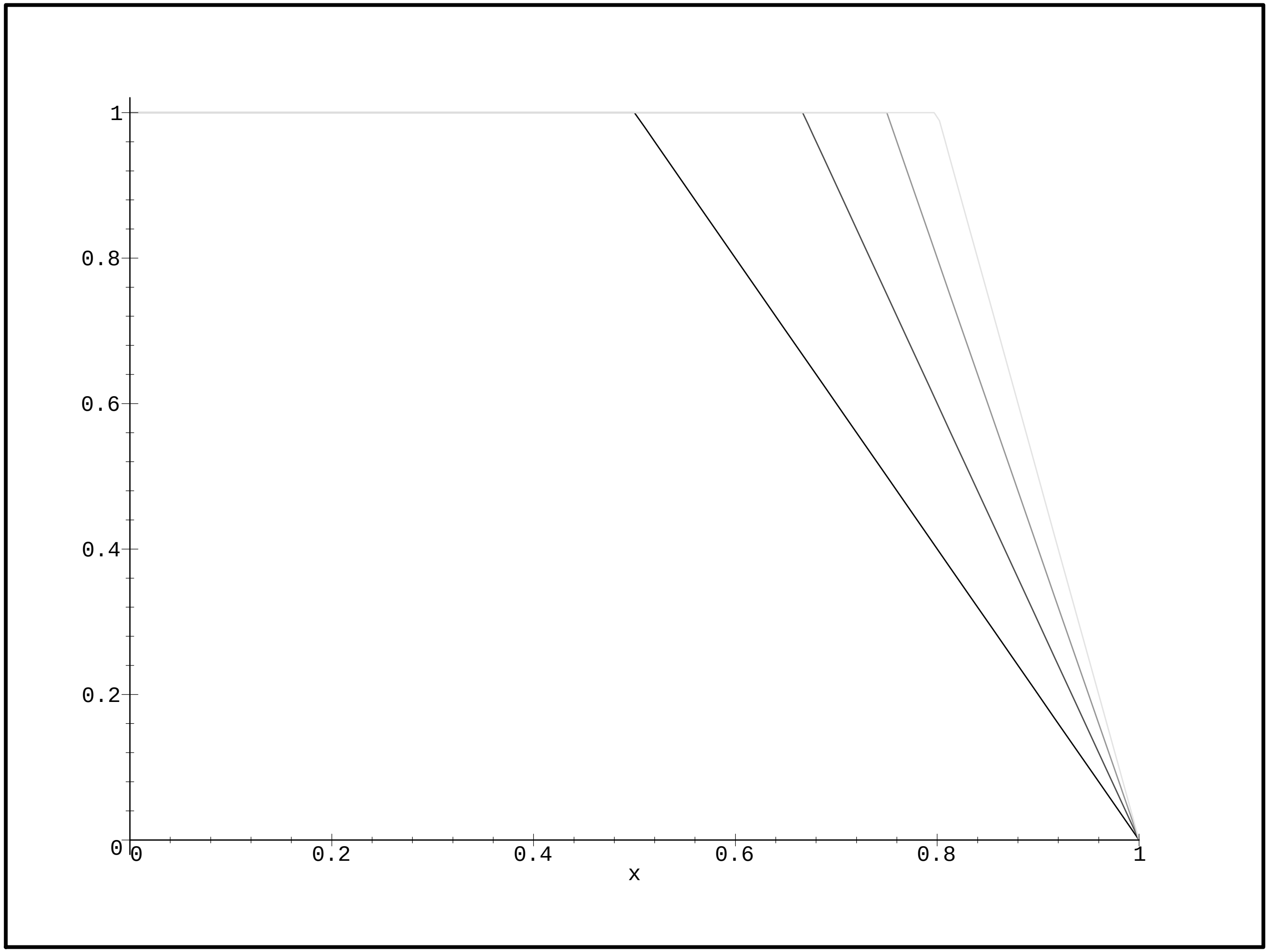
$$v(\bigsqcup^{n-1} \neg A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v(A) = 1 \\ 1 & \text{falls } v(A) < 1 \end{cases}$$

Zunächst wieder Beispiele:

# $\neg A \sqcup \neg A$



# $\sqcup^{m-1}\neg A$ **für** $m = 3, 4, 5, 6$



# Beweis

Für alle $v : AL_{var} \longrightarrow W_n$ gilt

$$v(\bigsqcup^{n-1} \neg A) = 1$$

gdw $\quad min\{1, (n-1) \cdot (1 - v(A))\} = 1$

gdw $\quad (n-1) \cdot (1 - v(A)) \geq 1$

gdw $\quad v(A) \leq \frac{n-2}{n-1}$

Da für jedes $p \in W_n$ mit $p < 1$ schon $p \leq \frac{n-2}{n-1}$ gilt, folgt die Behauptung.

# Behauptung

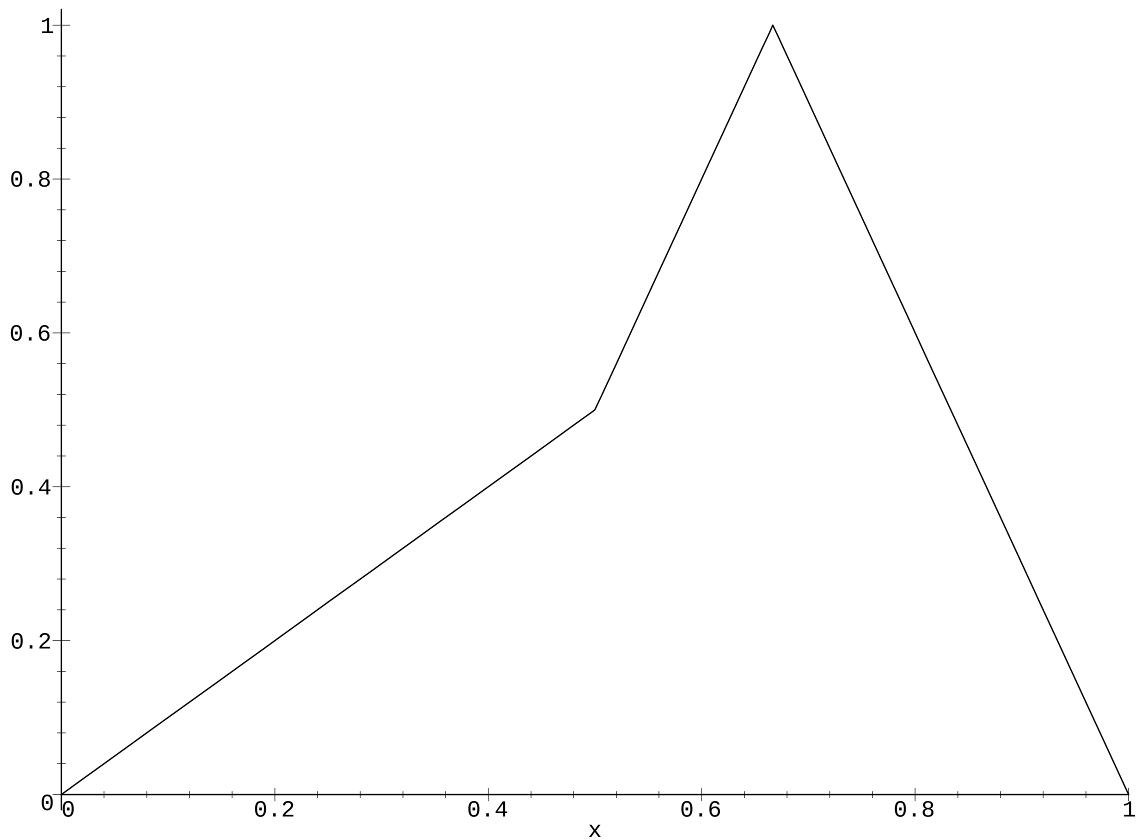
Für die Formel

$$C_{m-1} = (\bigsqcup^{m-1} \neg A) \wedge (A \sqcup \bigsqcap^{m-2} A)$$

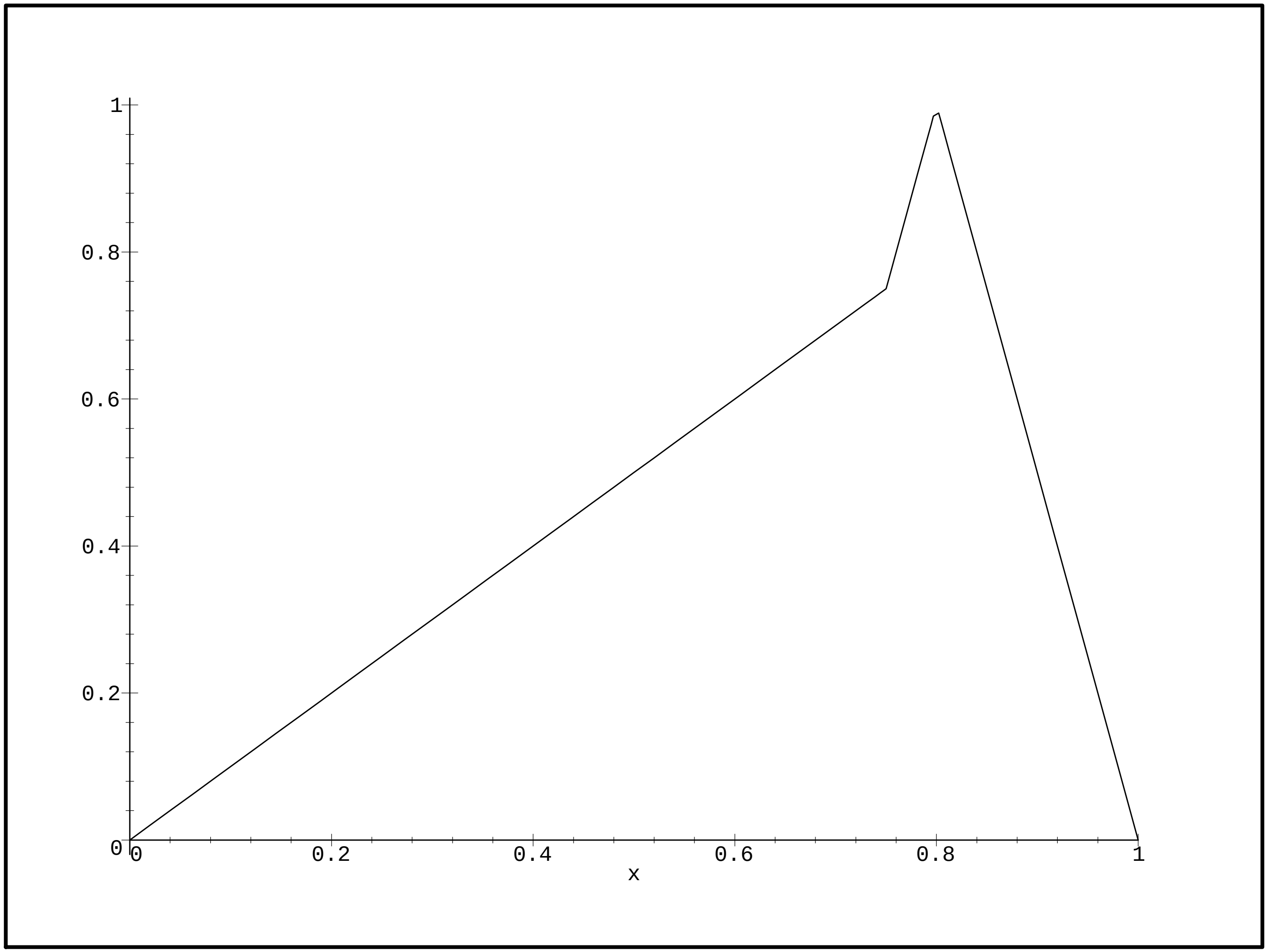
gilt

$$v(C_{m-1}) = 1 \quad \text{gdw} \quad v(A) = \frac{m-2}{m-1}$$

# $C_3$



# $C_5$



# Satz

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}) \subseteq Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Łukas}})$$

gdw

$(m-1)$ ist ein Teiler von $(n-1)$

# Beweis

Es ist nur noch die Richtung von oben nach unten zu beweisen.

Gelte also

$$Taut(\mathcal{L}^n_{Łukas}) \subseteq Taut(\mathcal{L}^m_{Łukas})$$

Wir zeigen zunächst, daß dann gilt:

$$W_m \subseteq W_n$$

Angenommen, das sei nicht der Fall.

# Beweis

Dann gilt

$$\frac{1}{m-1} \notin W_n$$

Denn sonst wäre

$$\frac{1}{m-1} = \frac{k}{n-1}$$

und also für alle Elemente von $W_m$:

$$\frac{l}{m-1} = \frac{l \cdot k}{n-1} \in W_n$$

im Widerspruch zur Annahme $W_m \not\subseteq W_n$

# Beweis

Da $W_n$ abgeschlossen ist unter der Funktion $f(x) = 1 - x$ gilt auch

$$\frac{m-2}{m-1} \notin W_n$$

# Beweis

Schon gezeigt: Für $C_{m-1} = (\bigsqcup^{m-1} \neg A) \wedge (A \sqcup \bigsqcap^{m-2} A)$ gilt:

$$v(C_{m-1}) = 1 \quad \text{gdw} \quad v(A) = \frac{m-2}{m-1}$$

Und:

$$v(\bigsqcup^{n-1} \neg A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v(A) = 1 \\ 1 & \text{falls } v(A) < 1 \end{cases}$$

Daraus folgt für $F = \bigsqcup^{n-1} \neg C_{m-1}$:

$$v(F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v(A) = \frac{m-2}{m-1} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Beweis

Wegen $\frac{m-2}{m-1} \notin W_n$ folgt also

$$F \in Taut(\mathcal{L}^n_{\text{Ł}ukas})$$

und wegen $\frac{m-2}{m-1} \in W_m$

$$F \notin Taut(\mathcal{L}^m_{\text{Ł}ukas})$$

im Widerspruch zur Annahme.

Damit ist

$$W_m \subseteq W_n$$

gezeigt.

# Beweis

Aus

$$W_m \subseteq W_n$$

folgt insbesondere

$$\frac{1}{m-1} \in W_n$$

also

$$\frac{1}{m-1} = \frac{k}{n-1}$$

und damit

$$n-1 = k \cdot (m-1)$$

Also ist $(m-1)$ Teiler von $(n-1)$

# Der Satz von McNaughton

Eine reell-wertige Funktion $f : [0,1]^k \longrightarrow [0,1]$ ist durch eine $\mathcal{L}^{\aleph_1}_{Łukas}$-Formel definierbar, genau dann, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. $f(x_1, \dots, x_k)$ ist stetig,
2. es gibt endlich viele lineare Polynome $p_1, \dots, p_s$ von der Form

$$p_j = b_j + c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k$$

   mit Koeffizienten $b_j \in \mathbb{Z}$ und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$,
   so daß für jedes $k$-Tupel $\langle r_1, \dots, r_k \rangle \in [0,1]^k$ ein $1 \le j \le s$ existiert mit

$$f(r_1, \dots, r_k) = p_j(r_1, \dots, r_k)$$

# Übungsaufgabe

Zeigen Sie, daß in jeder Łukasiewicz Logik $\mathcal{L}^n_{\textit{Łukas}}$ die Operatoren

$$\vee, \wedge \text{ und } \equiv$$

durch die verbleibenden

$$\neg, \Rightarrow$$

definiert werden können.

Lösung

$$\begin{array}{lcl} A \vee B &=& max\{A,B\} &=& (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \\ A \wedge B &=& min\{A,B\} &=& \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \equiv B &=& 1 - \mid A - B \mid &=& (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \end{array}$$

# Übungsaufgabe

Zeigen Sie, daß in jeder Łukasiewicz Logik $\mathcal{L}^n_{\text{Łukas}}$ die Operatoren

$$\vee, \wedge \text{ und } \rightarrow$$

durch

$$\neg, \sqcup$$

definiert werden können.

Lösung

$$\begin{aligned}
A \vee B &= \neg(\neg A \sqcup B) \sqcup B \\
A \wedge B &= \neg(\neg A \vee \neg B) \\
A \Rightarrow B &= \neg A \sqcup B
\end{aligned}$$

# Herleitungen

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg A \sqcup B) \sqcup B &= \\
min\{1, 1 - min\{1 - A, B\} + B\} &= \\
min\{1, 1 + B + max\{1 - A, -B\}\} &= \\
min\{1, max\{B, A\}\} &= \\
max\{B, A\} &= \\
A \vee B &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg A \vee \neg B) &= 1 - max\{1 - A, 1 - B\} \\
&= 1 + min\{A - 1, B - 1\} \\
&= min\{A, B\} \\
&= A \wedge B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg A \sqcup B &= min\{1, 1 - A + B\} \\
&= A \Rightarrow B
\end{aligned}
$$

# Übungsaufgabe

Bestimmen Sie die Funktion $f^m(A)$, die von der Formel $\sqcup^m A \Rightarrow \sqcup^{m-1} A$ auf dem rellen Intervall $[0,1]$ erzeugt wird.

## Lösung

$$f^m(A) = \begin{cases} 1 - A & \text{falls} \quad A \leq \frac{1}{m} \\ (m-1)A & \text{falls} \quad \frac{1}{m} \leq A \leq \frac{1}{m-1} \\ 1 & \text{falls} \quad \frac{1}{m-1} \leq A \end{cases}$$

# Übungsaufgabe

Bestimmen Sie die Funktion $g^m(A)$, die von der Formel $C_m = (\bigsqcup_{i=1}^{m} \neg A) \wedge (A \sqcup \bigsqcap_{i=1}^{m-1} A)$ auf dem rellen Intervall $[0,1]$ erzeugt wird.

## Lösung

$$g^m(A) = \begin{cases} A & \text{falls} \quad A \leq \frac{m-2}{m-1} \\ (2-m)+mA & \text{falls} \quad \frac{m-2}{m-1} \leq A \leq \frac{m-2}{m-1} \\ m-mA & \text{falls} \quad \frac{m-2}{m-1} \leq A \end{cases}$$