Reduktion auf zweiwertige Logik

Starke Negationsnormalform

Definition:

Eine $\mathcal{L}_3$-Formel A heißt eine

starke Negationsnormalform,

wenn in A das starke Negationszeichen $\neg$ höchstens vor atomaren Formeln vorkommt.

Das schwache Negationszeichen unterliegt keiner Einschränkung.

Starke Negationsnormalform

Lemma:

Zu jeder $\mathcal{L}_3$-Formel

$$A$$

gibt es eine $\mathcal{L}_3$-Formel

$$A^{snf}$$

in Negationsnormalform, so daß A und A^{snf} dieselbe 3-wertige Funktion erzeugen, d.h. so daß

$$A \; id \; A^{snf}$$

allgemeingültig ist.

Beweis

$$
\begin{array}{lcl}
A^{snf} & = & A \text{ falls } A \text{ atomar ist} \\
(\neg A)^{snf} & = & \neg A \text{ falls } A \text{ atomar ist} \\
(\neg\neg A)^{snf} & = & A^{snf} \\
(\neg \sim A)^{snf} & = & \sim\sim A^{snf} \\
(\neg(A \wedge B))^{snf} & = & (\neg A)^{snf} \vee (\neg B)^{snf} \\
(\neg(A \vee B))^{snf} & = & (\neg A)^{snf} \wedge (\neg B)^{snf} \\
(\neg(\exists x A))^{snf} & = & \forall x (\neg A)^{snf} \\
(\neg(\forall x A))^{snf} & = & \exists x (\neg A)^{snf} \\
(A \wedge B)^{snf} & = & A^{snf} \wedge B^{snf} \\
(A \vee B)^{snf} & = & A^{snf} \vee B^{snf} \\
(\exists x A)^{snf} & = & \exists x A^{snf} \\
(\forall x A)^{snf} & = & \forall x A^{snf} \\
(\sim A)^{snf} & = & \sim A^{snf}
\end{array}
$$

Vokabulartransformation

Eine $\mathcal{L}_3$-Formel

A über dem Vokabular V

wird transformiert in eine $\mathcal{L}$-Formel

A_0 über einem Vokabular V_0.

Die Konstanten- und Funktionszeichen sind in V und V_0 dieselben. Ist

$$p$$

ein n-stelliges Prädikatszeichen in V so gibt es in V_0 statt dessen zwei n-stellige Prädikatszeichen

p^+ und p^-

Formeltransformation

Definition:

Zu A in $Fml_3(V)$ wird A_0 in $Fml(V_0)$ konstruiert indem man:

- die äquivalente starke Negationsnormalform A^{snf} herstellt.
- in A^{snf} jede stark negiert vorkommende atomare Teilformel

  $\neg p(t_1, \ldots, t_n)$ ersetzt durch $p^-(t_1, \ldots, t_n)$
- und jede nicht stark negiert vorkommende atomare Teilformel

  $p(t_1, \ldots, t_n)$ ersetzt durch $p^+(t_1, \ldots, t_n)$

Transformationsbeispiel

Für

$$A \quad = \quad p(x) \leftrightarrow q(x)$$

erhält man

$$A_0 \quad = \quad (p^-(x) \vee q^+(x)) \wedge (p^+(x) \vee q^-(x))$$

Strukturtransformation

$\mathcal{L}_3$-Strukturen $\mathcal{M}$ über V werden in zweiwertige Strukturen $\mathcal{M}_0$ über V_0 transformiert.

Definition:

Die Interpretation der Konstanten- und Funktionszeichen ist dieselbe in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_0$.

Ist p ein n-stelliges Prädikatszeichen in V, so setzen wir:

$$\mathcal{M}_0 \models p^+(m_1, \ldots, m_n) \quad \text{gdw} \quad v_{\mathcal{M}}(p(m_1, \ldots, m_n)) = 1$$

$$\mathcal{M}_0 \models p^-(m_1, \ldots, m_n) \quad \text{gdw} \quad v_{\mathcal{M}}(p(m_1, \ldots, m_n)) = 0$$

Zusammenhang

Lemma:
Für

- jede $\mathcal{L}_3$-Struktur $\mathcal{M}$ über V,
- jede Formel $A(x_1,\ldots,x_k)$ aus $Fml_3(V)$ mit den freien Variablen $x_1,\ldots,x_k$ und
- jedes k-Tupel $m_1,\ldots\ldots,m_k$ von Elementen aus $\mathcal{M}$

gilt:

$$v_{\mathcal{M}}(A(m_1,\ldots,m_k)) = 1 \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M}_0 \models A_0(m_1,\ldots,m_k)$$

Zusammenhang

Lemma (Surjektivitätslemma):
Zu einer zweiwertigen Struktur $\mathcal{N}$ über dem Vokabular V_0 gibt es eine $\mathcal{L}_3$-Struktur $\mathcal{M}$ über V mit

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}$$

genau dann, wenn für jedes n-stellige Prädikatszeichen $p \in V$ gilt

$$\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \sim (p^+(x_1, \ldots, x_n) \wedge p^-(x_1, \ldots, x_n))$$

Transformationstheorem

Sei Σ eine Menge von $Fml_3(V)$-Formeln und A eine einzelne $Fml_3(V)$-Formel, sei weiter

$$\Sigma_0 = \{B_0 : B \in \Sigma\}$$

und T die Menge aller Formeln der Form

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \sim (p^+(x_1, \ldots, x_n) \wedge p^-(x_1, \ldots, x_n))$$

für jedes n und jedes n-stellige Prädikatszeichen $p \in V$.

Dann gilt:

$$\Sigma \models_3 A \quad \text{gdw} \quad \Sigma_0 \cup T \models A_0$$

Insbesondere:

$$A \text{ ist eine dreiwertige Tautologie} \quad \text{gdw} \quad T \models A_0$$

Übungsaufgabe

Für eine $\mathcal{L}_3$-Struktur $\mathcal{M}$ sei $\mathcal{M}_0$ konstruiert wie in der oben beschriebenen Strukturtransformation.
Finden Sie für jede Formel $A(x_1,\ldots,x_k)$ aus $Fml_3(V)$ mit den freien Variablen $x_1,\ldots,x_k$ eine Formel A_u,
so daß für jedes k-Tupel $m_1,\ldots\ldots,m_k$ von Elementen aus $\mathcal{M}$ gilt:

$$v_{\mathcal{M}}(A(m_1,\ldots,m_k)) = u \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M}_0 \models A_u(m_1,\ldots,m_k)$$

Lösung:

$$A_u \quad = \quad \sim A_0 \wedge \sim(\neg A)_0$$

Denn damit:
$\mathcal{M}_0 \models A_u$ gdw.
$v_{\mathcal{M}}(A) \neq 1$ und $v_{\mathcal{M}}(\neg A) \neq 1$ gdw.
$v_{\mathcal{M}}(A) \in \{0,u\}$ und $v_{\mathcal{M}}(\neg A) \in \{u,1\}$ gdw. $v_{\mathcal{M}}(A) = u$