Abstrakte Konsequenzrelationen

Elementare Axiome

ALF(F)) sei die Menge aller aussagenlogischen Formeln über der Operatorenmenge F.

Eine zweistellige Relation $\vdash$ zwischen Teilmengen Σ von ALF und Elementen A aus ALF heißt eine (abstrakte) Konsequenzrelation, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

Axiom I: (Reflexivität)
Für jedes $A \in \Sigma$ gilt $\Sigma \vdash A$.

Axiom II: (Monotonie)
Gilt $\Sigma_0 \vdash A$ und $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$, dann gilt auch $\Sigma_1 \vdash A$.

Axiom III: (Transitivität)
Gilt $\Delta \vdash A$, und für jedes $B \in \Delta$ auch $\Sigma \vdash B$, dann gilt $\Sigma \vdash A$.

Endlichkeitsaxiom

Eine Konsequenzrelation $\vdash$ besitzt die Endlichkeitseigenschaft, falls gilt

Axiom IV:

Gilt $\Sigma \vdash A$,
dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma_0 \vdash A$.

Strukturalitätsaxiom

Ist A eine aussagenlogische Formel und s eine Abbildung, die jeder Aussagenvariablen p eine aussagenlogische Formel zuordnet, so wird mit $s(A)$ das Ergebnis bezeichnet, das entsteht, wenn jede Aussagenvariable p in A durch $s(p)$ ersetzt wird.

Eine Konsequenzrelation $\vdash$ heißt strukturell, wenn:

Axiom V:

Gilt $\Sigma \vdash A$, dann gilt für jede Substitution s auch $s(\Sigma) \vdash s(A)$.

(Hierbei steht $s(\Sigma)$ für die Menge $\{s(B) : B \in \Sigma\}$.)

Uniformitätsaxiom

Gilt für alle $A \in$ ALF die Beziehung $\Sigma \vdash A$,
dann heißt Σ widersprüchlich.

Eine Konsequenzrelation $\vdash$ heißt uniform, wenn:

Axiom VI:

$\{B\}$ sei nicht widersprüchlich und
habe keine Aussagenvariable mit Σ oder A gemeinsam

Gilt $\Sigma \cup \{B\} \vdash A$, dann auch $\Sigma \vdash A$.

Beispiele

Lemma:

Sei $\mathcal{M}$ eine endliche F-Algebra. Dann ist $\models_{\mathcal{M}}$ eine uniforme, strukturelle Konsequenzrelation mit Endlichkeitseigenschaft.

(Einzig die Endlichkeitseigenschaft ist nicht trivial.)

Darstellungssatz

Theorem:

Sei $\vdash$ eine strukturelle Konsequenzrelation mit Endlichkeitseigenschaft.

Es gibt eine F-Algebra $\mathcal{M}$ mit $\vdash = \models_{\mathcal{M}}$

gdw.

$\vdash$ ist uniform.

Dieses Resultat wurde zuerst von Los und Suszko 1958 bewiesen. Einen Beweis findet man z.B. auch in dem Handbuchartikel [Urquhart68, S. 78ff]