Modale Logiken: Einführung

Modal Logic

In classical logic, it is only important whether a formula is true

In modal logic, it is also important in which

- way
- mode
- state

a formula is true

A formula (a proposition) is

- necessarily / possibly true
- true today / tomorrow
- believed / known
- true before / after an action / the execution of a program

Propositional Modal Logic: Formulas

- The propositional variables are modal formulas
- If A, B are modal formulas, then

$$\neg A \qquad (A \wedge B) \qquad (A \vee B) \qquad (A \rightarrow B) \qquad (A \leftrightarrow B)$$

$\Box A$ (read "box A", "necessarily A")

$\Diamond A$ (read "diamond A", "possibly A")

are modal formulas

Informal Interpretations of $\Box$

$\Box F$ means

- F is necessarily true
- F is always true (in future states/words)
- an agent a believes F
- an agent a knows F
- F is true after all possible executions of a program p

Notation

If necessary write

$$\Box_a F \qquad \Box_p F \qquad [a]F \qquad [p]F$$

instead of $\Box F$

Informal Interpretations of $\Diamond$

$\Box F$	$\Diamond F$ (the same as $\neg\Box\neg F$)
F is necessarily true	F is possibly true
F is always true	F at least once true
agent a believes F	F is consistent with a's beliefs
agent a knows F	a does not know $\neg F$
F is true after all possible executions of program p	F is true after at least one possible execution of program p

Ein Puzzle

Drei Weisen werden Hüte aufgesetzt, jedem genau einer. Die Hüte sind entweder weiß oder schwarz, und jedem ist bekannt, daß mindestens ein schwarzer Hut mit dabei ist.
Jeder der Weisen sieht, welche Hüte die anderen beiden aufsitzen haben und soll erschließen, welchen Hut er aufsitzen hat, natürlich ohne in einen Spiegel zu schauen, den Hut abzunehmen oder ähnliches.
Nach einer Weile sagt einer der Weisen: "Ich weiß nicht, welchen Hut ich aufhabe.Nach einer weiteren Pause des Nachdenkens sagt ein zweiter: "Ich weiß auch nicht, welchen Hut ich aufhabe."
"Dann", sagt der Dritte, "weiß ich, daß ich einen schwarzen Hut aufhabe."

Formalisierung des Puzzles

Notation

S_i	der i-te Weise hat einen schwarzen Hut auf
W_i	der i-te Weise hat einen weißen Hut auf
$\Box_i\, A$	der i-te Weise weiß, daß A wahr ist

jeweils für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\quad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\quad (B_2)$
- $W_i \wedge W_j \longrightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \longrightarrow \Box_j W_i$ für $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \longrightarrow \Box_j \neg W_i$ für $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \longrightarrow S_i$ für $i \in \{1,2,3\}$
- $\neg S_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1,2,3\}$
- $S_i \vee W_i$ für $i \in \{1,2,3\}$

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg \Box_1 A$
- $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ (K)
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A) \rightarrow \Box B$ (K)

Akzeptable Schlußregeln

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$ (Modus ponens)
- $$\frac{A}{\Box A}$$ (G)

Man beachte:
Die Regel (G) is nicht das gleiche, wie $A \rightarrow \Box A$ als Axiom zu verwenden.

Modale Ableitbarkeit

Ein modallogisches System besteht aus Axiomen und Schlußregeln

Ein modallogische System $\mathbf{S}$ induziert eine Ableitbarkeitsrelation $\vdash_{\mathbf{S}}$.

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{S}} A$$

gilt für eine Formelmenge $\Sigma \subseteq Fml_{ALmod}$ und eine Formel $A \in Fml_{ALmod}$, wenn es einen Beweis für A gibt, der nur die Formeln aus Σ und die Axiome und Schlußregeln von $\mathbf{S}$ benutzt.

Das modallogische System $\mathbf{K}$

Axiome alle AL-Tautologien

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A) \rightarrow \Box B) \qquad \text{(K)}$$

Regeln

$$\frac{A \,,\, A \rightarrow B}{B} \qquad \text{(MP)}$$

$$\frac{A}{\Box A} \qquad \text{(G)}$$

Einige modallogische Systeme

T	**K**	+	$\Box(A) \rightarrow A$
D	**K**	+	$\Box(A) \rightarrow \Diamond A$
B	**T**	+	$\neg A \rightarrow \Box\neg\Box A$
S4	**T**	+	$\Box(A) \rightarrow \Box\Box A$
S5	**T**	+	$\neg\Box(A) \rightarrow \Box\neg\Box A$
S4.2	**S4**	+	$\Diamond\Box(A) \rightarrow \Box\Diamond A$
S4.3	**S4**	+	$\Box(\Box(A \rightarrow B)) \vee \Box(\Box(B \rightarrow A))$
C	**K**	+	$\dfrac{A \rightarrow B}{\Box(A \rightarrow B)}$ statt (G).

Kripke Frames and Kripke Structures

Definition

A Kripke frame

$$\mathcal{F} = (S, R)$$

consists of

- a non-empty set S (of worlds / states)
- an *accessibility relation* $R \subseteq S \times S$

Definition

A Kripke structure

$$\mathcal{K} = (S, R, I)$$

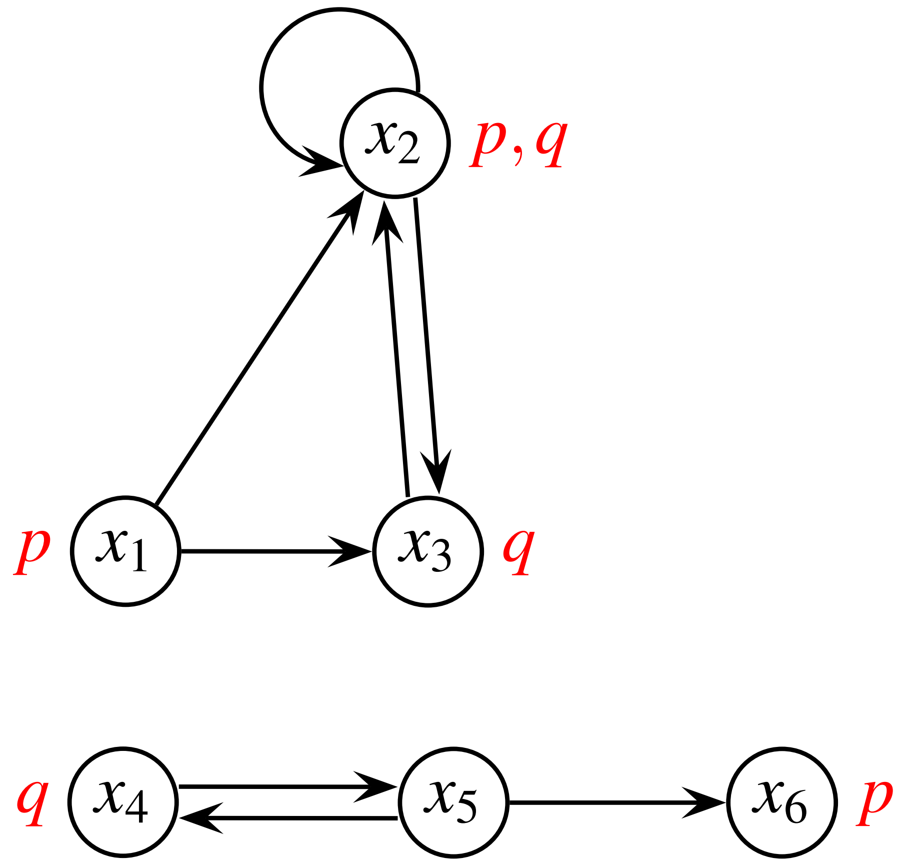
consists of

- a Kripke frame $\mathcal{F} = (S, R)$
- an *interpretation* $I : ALVar \times S \to \{1, 0\}$

Kripke Structures: Example

accessibility relation

set of states



Interpretation I

Modal Logic: Semantics

Given: Kripke structure $\mathcal{K} = (S, R, I)$

Valuation

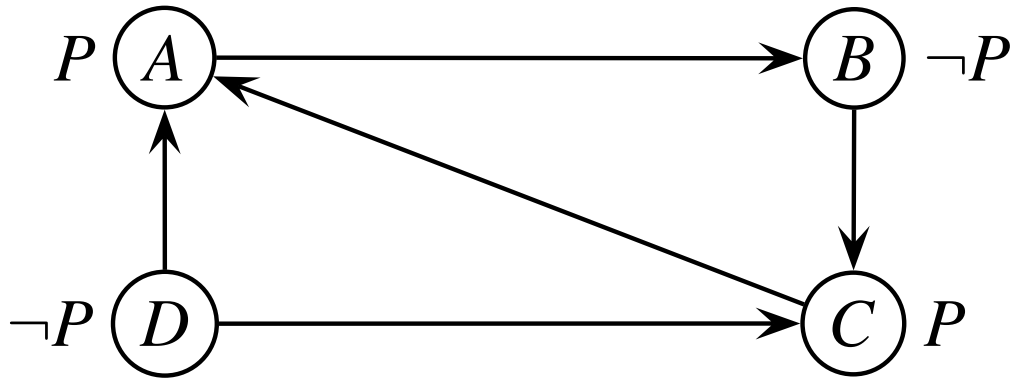
$val_{\mathcal{K}}(p)(s) \; = \; I(p)(s)$ for $p \in ALVar$

$val_{\mathcal{K}}$ defined for propositional operators in the same way as in classical logic

$$val_{\mathcal{K}}(\Box A)(s) \; = \; \begin{cases} 1 & \text{if } val_{\mathcal{K}}(A)(s') = 1 \text{ for} \\ & \text{all } s' \in S \text{ with } sRs' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$val_{\mathcal{K}}(\Diamond A)(s) \; = \; \begin{cases} 1 & \text{if } val_{\mathcal{K}}(A)(s') = 1 \text{ for} \\ & \text{at least one } s' \in S \text{ with } sRs' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Modal Logic: Example for Evaluation



$(\mathcal{K}, A) \models P$	$(\mathcal{K}, B) \models \neg P$	$(\mathcal{K}, C) \models P$	$(\mathcal{K}, D) \models \neg P$
$(\mathcal{K}, A) \models \Box\neg P$	$(\mathcal{K}, B) \models \Box P$	$(\mathcal{K}, C) \models \Box P$	$(\mathcal{K}, D) \models \Box P$
$(\mathcal{K}, A) \models \Box\Box P$	$(\mathcal{K}, B) \models \Box\Box P$	$(\mathcal{K}, C) \models \Box\Box\neg P$	—

Saul Aaron Kripke

Born 1940 in Omaha (US)	
First publication:	*A Completeness Theorem in Modal Logic* The Journal of Symbolic Logic, 1959
Studied at:	Harvard, Princeton, Oxford and Rockefeller University
Positions:	Harvard, Rockefeller, Columbia, Cornell, Berkeley, UCLA, Oxford
since 1977	Professor at Princeton University
since 1998	Emeritus at Princeton University

Konsequenzrelationen

Lokale modallogische Konsequenz

Sei $\Sigma \subseteq Fml_{ALmod}$ und $F \in Fml_{ALmod}$.

$$\Sigma \vdash_L F$$

gilt genau dann, wenn für jede Kripke Struktur $\mathcal{K} = (G, R, v)$ und jede Welt $g \in G$ gilt:

$$\text{falls } g \models \Sigma \text{ , dann } g \models F$$

Konsequenzrelationen

Globale modallogische Konsequenz

$$\Sigma \vdash_G F$$

gilt genau dann, wenn für jede Kripke Struktur
$\mathcal{K} = (G, R, v)$:

falls für jede Welt $g \in G$ gilt $g \models \Sigma$

dann

dann gilt auch für jede Welt $g \in G \quad g \models F$

Relative Konsequenzrelationen

Sei $\mathbf{T}$ eine Klasse von Kripke Strukturen.

Relative lokale modallogische Konsequenz

Sei $\Sigma \subseteq Fml_{ALmod}$ und $F \in Fml_{ALmod}$.

$$\Sigma \vdash_L^{\mathbf{T}} F$$

gilt genau dann, wenn für jede Kripke Struktur
$\mathcal{K} = (G, R, v) \in \mathbf{T}$ und jede Welt $g \in G$ gilt:

$$\text{falls } g \models \Sigma \text{, dann } g \models F$$

Relative Konsequenzrelationen

Sei $\mathbf{T}$ eine Klasse von Kripke Strukturen.

Relative globale modallogische Konsequenz

$$\Sigma \vdash_G^{\mathbf{T}} F$$

gilt genau dann, wenn für jede Kripke Struktur $\mathcal{K} = (G, R, v) \in \mathbf{T}$:

falls für jede Welt $g \in G$ gilt $g \models \Sigma$

dann

dann gilt auch für jede Welt $g \in G \quad g \models F$

Tautologie und Erfüllbarkeit

Eine Formel F heißt eine modallogische Tautologie oder allgemeingültig, wenn $\emptyset \vdash F$ gilt.

Gilt für eine Klasse $\mathbf{T}$ von Kripke Strukturen $\emptyset \vdash^{\mathbf{T}} F$ dann nennen wir F eine $\mathbf{T}$-Tautologie.

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq Fml_{ALmod}$ heißt erfüllbar, wenn es eine Kripke Stuktur $\mathcal{K}$ und eine Welt g gibt mit $(\mathcal{K}, g) \vdash \Sigma$.

Deduktionstheorem

Für $A, B \in Fml_{ALmod}$ gilt

$$\begin{array}{lll} B \vdash_L A & \text{gdw} & \{B, \neg A\} \text{ ist nicht erfüllbar} \\ & \text{gdw} & \vdash_L B \to A \end{array}$$

Beweis:
Durch Einsetzen der Definitionen erhält man

$$B \vdash_L A \quad \text{gdw} \quad \{B, \neg A\} \text{ ist nicht erfüllbar}$$

Rein aussagenlogisch ist die folgende Äquivalenz gültig:

$$\{B \to A\} \text{ allgemeingültig} \quad \text{gdw} \quad \{B, \neg A\} \text{ nicht erfüllbar}$$

Wieder durch Einsetzen der Definitionen sieht man

$$\{B \to A\} \text{ allgemeingültig} \quad \text{gdw} \quad \vdash_L B \to A$$

Modal Logic: Valid Formulas

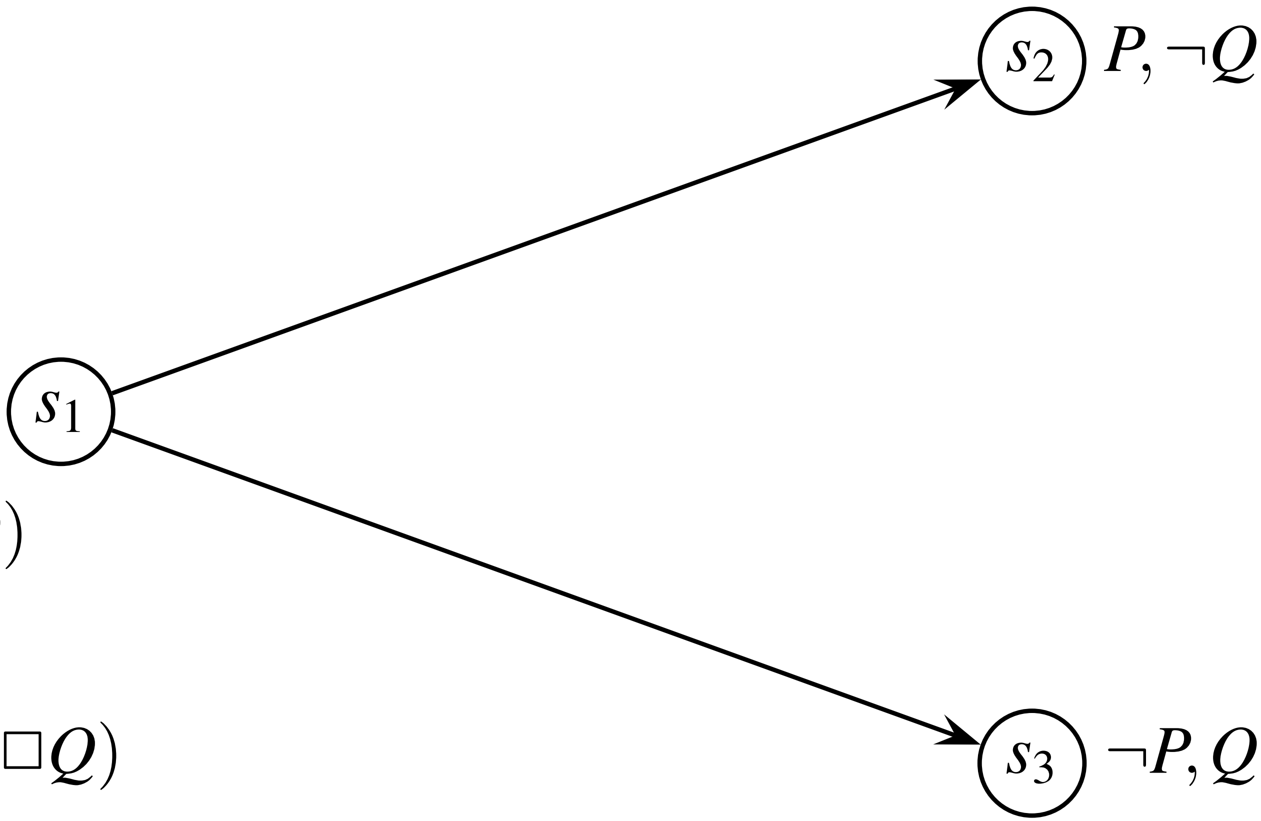
Valid

- $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$
- $(\Box P \land \Box(P \to Q)) \to \Box Q$
- $(\Box P \lor \Box Q) \to \Box(P \lor Q)$
- $(\Box P \land \Box Q) \leftrightarrow \Box(P \land Q)$
- $\Box P \leftrightarrow \neg\Diamond\neg P$
- $\Diamond(P \lor Q) \leftrightarrow (\Diamond P \lor \Diamond Q)$
- $\Diamond(P \land Q) \to (\Diamond P \land \Diamond Q)$

Not valid:

- $\Box(P \lor Q) \to (\Box P \lor \Box Q)$
- $(\Diamond P \land \Diamond Q) \to \Diamond(P \land Q)$

Not Valid: $\Box(P \lor Q) \to (\Box P \lor \Box Q)$



$\Box(P \lor Q)$
$\neg\Box P$
$\neg\Box Q$
$\neg(\Box P \lor \Box Q)$

$\Box(P \lor Q) \to (\Box P \lor \Box Q)$ not true in state s_1

Eine formale Ableitung

$$W_3 \land W_2 \rightarrow S_1 \qquad (1)$$

Faktum

$$\Box_1(W_3 \land W_2 \rightarrow S_1) \qquad (2)$$

aus (1) mit (G)

$$\Box_1(W_3 \land W_2 \rightarrow S_1) \land \neg\Box_1(S_1) \rightarrow \neg\Box_1(W_3 \land W_2) \qquad (3)$$

aus (K) und Aussagenlogik

$$\neg\Box_1(W_3 \land W_2) \qquad (4)$$

aus (2), (3) und Faktum B_1 mit (MP)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$(W_3 \rightarrow \Box_1 W_3) \land (W_2 \rightarrow \Box_1 W_2) \qquad (5)$$

Fakten

$$W_3 \land W_2 \rightarrow \Box_1 W_3 \land \Box_1 W_2 \qquad (6)$$

mit AL aus (5)

$$W_3 \land W_2 \rightarrow \Box_1 (W_3 \land W_2) \qquad (7)$$

mit (M), AL und (6)

$$\neg (W_3 \land W_2) \qquad (8)$$

mit AL aus (7) und (4)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\Box_2(W_3 \rightarrow \neg W_2) \tag{9}$$

mit AL und Regel (G) aus (8)

$$\Box_2 W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_2 \tag{10}$$

mit Axiom (K) und AL aus (9)

$$\neg\Box_2\neg W_2 \rightarrow \neg\Box_2 W_3 \tag{11}$$

Kontraposition von (10)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$$\neg W_2 \rightarrow S_2 \tag{12}$$
Faktum

$$\Box_2(\neg W_2 \rightarrow S_2) \tag{13}$$
mit Regel (G) aus (12)

$$\Box_2\neg W_2 \rightarrow \Box_2 S_2 \tag{14}$$
mit (MP), Axiom (K) aus (13)

$$\neg\Box_2\neg W_2 \tag{15}$$
aus (14) mit AL und Faktum B_2

$$\neg\Box_2 W_3 \tag{16}$$
aus (15) und (11)

Eine formale Ableitung (Forts.)

$\neg W_3$ (17)

aus (16), dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow \Box_2 \neg W_3$ und AL

S_3 (18)

aus (17) mit dem Faktum $\neg W_3 \rightarrow S_3$

$\Box_3 S_3$ (19)

mit Regel (G) aus (18)