Korrespondenztheorie

Korrespondenztheorie

Beispiel:

Ein Rahmen (G, R) ist reflexiv genau dann, wenn in allen Kripke Strukturen $\mathcal{K} = (G, R, v)$ die Formel $\Box p \rightarrow p$ gültig ist.

Definition:

Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Rahmen und $F \in Fml_{ALmod}$.
Wir sagen F charakterisiert die Klasse $\mathcal{G}$, falls für jeden Rahmen (G, R) gilt:

$(G, R) \in \mathcal{G}$
gdw
für jedes v gilt $(G, R, v) \models F$

Einige Eigenschaften für Rahmen

reflexiv	$\forall x R(x,x)$	$\Box p \rightarrow p$
sym.	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$	$p \rightarrow \Box\Diamond p$
seriell	$\forall x \exists y R(x,y)$	$\Box p \rightarrow \Diamond p$
transitiv	$\forall x \forall y \forall z$	
	$(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$
Euklidisch	$\forall x \forall y \forall z$	
	$(R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow R(y,z))$	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$
schwach	$\forall x \forall y \forall z$	
funktional	$(R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$	$\Diamond p \rightarrow \Box p$
funktional	schwach funktional und	
	$\forall x \exists y R(x,y)$	$\Diamond p \leftrightarrow \Box p$

Einige Eigenschaften für Rahmen

dicht	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow$ $\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))$	$\Box\Box p \rightarrow \Box p$
schwach zusammen hängend	$\forall x \forall y \forall z$ $(R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow$ $(R(y,z) \vee y = z \vee R(z,y))$	$\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q)$ $\vee$ $\Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$
schwach gerichtet	$\forall x \forall y \forall z$ $((R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow$ $\exists w\ (R(y,w)\ \wedge\ R(z,w))$	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$
	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow$ $\exists z (R(x,z) \wedge R(y,z)))$	$\Diamond\Box p \rightarrow \Diamond p$

Eine Abkürzung

$$
\begin{aligned}
C(m,n,j,k) \quad = \quad & \forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 \\
& ((R^m(w_1,w_2) \wedge R^j(w_1,w_3)) \\
& \rightarrow \\
& \exists w_4 (R^n(w_2,w_4) \wedge R^k(w_3,w_4)))
\end{aligned}
$$

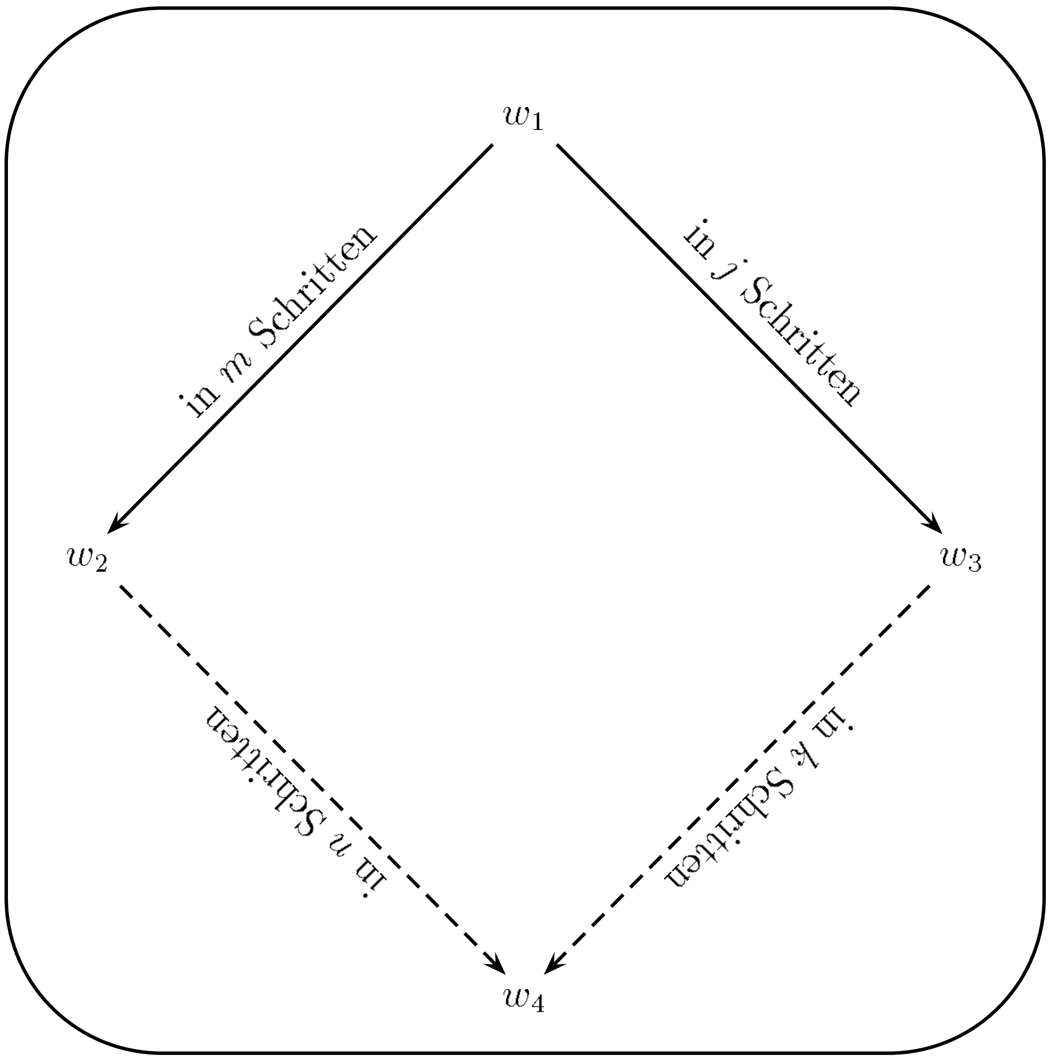
$$
\begin{aligned}
R^n(x,y) \quad = \quad & \exists u_1 \ldots \exists u_{n-1} \\
& (R(x,u_1) \wedge \ldots \wedge R(u_i,u_{i+1}) \wedge \ldots \wedge R(u_{n-1},y))
\end{aligned}
$$

Insbesondere

$R^0(x,y) = x \doteq y$ und
$R^1(x,y) = R(x,y)$ und
$R^2(x,y) = \exists u(R(x,u) \wedge R(u,y))$.

Visualisierung von $C(m, n, j, k)$

$C(m, n, j, k)$ beschreibt eine Konfluenzeigenschaft



Ein allgemeineres Resultat

Satz

Für jedes Quadrupel natürlicher Zahlen m, n, j, k charakterisiert die Formel

$$\Diamond^m \Box^n p \rightarrow \Box^j \Diamond^k p,$$

die Klasse aller Rahmen, in denen $C(m,n,j,k)$ wahr ist.

Dabei steht

$$\Box^n p \text{ für } \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ mal}} p$$

Insbesondere $\Box^0 p$ für p.

Fragen

- Gibt es zu jeder Formel ϕ des Prädikatenkalküls erster Stufe eine Formel $F \in Fml_{ALmod}$, so daß F die durch ϕ definierte Klasse von Rahmen charakterisiert?
- Gibt es zu jeder Formel $F \in Fml_{ALmod}$ eine Formel ϕ des Prädikatenkalküls erster Stufe, so daß F die durch ϕ definierte Klasse von Rahmen charakterisiert?

Satz

Die Klasse aller irreflexiven Rahmen,
d.h. die Klasse aller Rahmen (G,R), in denen die Formel

$$\forall x \neg R(x,x)$$

gilt,
kann nicht durch eine Formel der modalen Aussagenlogik charakterisiert werden.

Beweismethode

- Zu jeder Kripke Struktur $\mathcal{K}$ definiere eine Kripke Struktur $\mathcal{K}^*$, so daß in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^*$ dieselben Formeln aus Fml_{ALmod} gelten.
- Finde eine spezielle Struktur $\mathcal{K}_1 = (G_1, R_1, v_1)$, so daß $(G_1, R_1) \not\models \forall x \neg R(x,x)$ aber $(G_1^*, R_1^*) \models \forall x \neg R(x,x)$,
- Dann kann die Klasse aller irreflexiver Rahmen nicht durch eine Formel F aus Fml_{ALmod} charakterisiert werden, denn . . .

Beweismethode

Angenommen, es gebe ein Irreflexivität charakterisierendes F, dann gilt:

Da (G_1, R_1) nicht irreflexiv ist, gibt es ein v mit

$$(G_1, R_1, v) \not\models F$$

also

$$(G_1^*, R_1^*, v^*) \not\models F$$

Andererseits ist (G_1^*, R_1^*) irreflexiv. Daraus folgt

$$(G_1^*, R_1^*, v^*) \models F$$

Widerspruch! Also gibt es keine solches F.

Durchführung der Methode

Gegeben $\mathcal{K} = (G, R, v)$.
Für jedes $g \in G$ seien g^1, g^2 neue, verschiedene Welten.
$\mathcal{K}^* = (G^*, R^*, v^*)$ wird definiert durch

$$
\begin{array}{lcl}
G^* & = & \{g^i \mid g \in G, i \in \{1,2\}\} \\
R^*(g^i, h^j) & \text{gdw} & R(g,h), \quad i,j \in \{1,2\}, \quad g \neq h \\
R^*(g^i, g^j) & \text{gdw} & R(g,g), \quad i \neq j \\
v^*(g^i, p) & = & v(g,p)
\end{array}
$$

Wichtig ist, daß in keinem Fall $R^*(g^1, g^1)$ oder $R^*(g^2, g^2)$ gelten kann.

Lemma

Für jede Kripke Struktur $\mathcal{K}$ und jede Welt g von $\mathcal{K}$ gilt für jede Formel $F \in Fml_{ALmod}$:

$$\begin{array}{lll}
1 \quad (\mathcal{K}, g) \models F & \text{gdw} & (\mathcal{K}^*, g^1) \models F \\
2 \quad (\mathcal{K}, g) \models F & \text{gdw} & (\mathcal{K}^*, g^2) \models F \\
3 \quad \mathcal{K} \models F & \text{gdw} & \mathcal{K}^* \models F
\end{array}$$

Der letzte Schritt

Wir betrachten den Rahmen (G_1, R_1), der nur eine Welt g_0 enthält und in dem $R_1(g_0, g_0)$ gilt.

Nach Konstruktion ist (G_1, R_1) nicht irreflexiv, und
(G^*, R^*) ist irreflexiv.

Nicht charakterisierbare Klassen

$\forall x \neg R(x,x)$	Irreflexivität	
$\forall x \forall y R(x,y)$	Universalität	[Fitting]
$\exists x \exists y R(x,y)$	Nichttrivialität	[Fitting]
$\forall x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,y))$		[Benthem84]

Nicht PK1-def.bare modale Klasse

Gibt es zu jeder Formel $F \in Fml_{ALmod}$ eine Formel ϕ des Prädikatenkalküls erster Stufe, so daß F die durch ϕ definierte Klasse von Rahmen charakterisiert?
Die Formel

$$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$$

charakterisiert, die Klasse aller transitiven Rahmen (G, R), so daß keine unendliche aufsteigende Kette $g_0, g_1, \ldots, g_n \ldots$ in G existiert mit:

$$R(g_0, g_1), R(g_1, g_2), \ldots, R(g_n, g_{n+1}), \ldots$$

Mit anderen Worten: die Relation R^{-1} ist wohlfundiert.

Nicht def.bare multimodale Klasse

Die Zugänglichkeitsrelationen für $\Box_a$ und $\Box_b$ sind R_a und R_b.

Satz

Die Konjunktion der beiden multimodalen Formeln

$$\Box_a p \to (p \wedge \Box_b \Box_a p)$$
$$(\Box_a (p \to \Box_b p) \to (p \to \Box_a p))$$

charakterisiert die Klasse aller multimodalen Rahmen (G, R_a, R_b), so daß R_a die transitive Hülle von R_b ist.

Übungsaufgaben

Sei (G,R) ein Rahmen.
Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

1	$(G,R) \models C(0,1,2,0)$	gdw	R transitiv
2	$(G,R) \models C(0,1,0,0)$	gdw	R reflexiv
3	$(G,R) \models C(1,1,0,0)$	gdw	R symmetrisch
4	$(G,R) \models C(1,0,1,0)$	gdw	R funktional

Siehe [Stirling92], Seite 493.

Lösung

zu Teil 1: $(G,R) \models C(0,1,2,0)$ gdw R ist transitiv

Nach Definition ist $C(0,1,2,0)$

$$\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 ((w_1 = w_2 \wedge R^2(w_1, w_3)) \rightarrow \exists w_4 (R(w_2, w_4) \wedge w_3 = w_4))$$

Ersetze w_2 durch w_1 und w_4 durch w_3

$$\forall w_1 \forall w_3 (R^2(w_1, w_3) \rightarrow R(w_1, w_3))$$

Nach Auflösung der Definition von $R^2(w_1, w_3)$ erhält man

$$\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 (R(w_1, w_2) \wedge R(w_2, w_3)) \rightarrow R(w_1, w_3)$$

die Definition der Transitivität von R.

Lösung

zu Teil 2: $(G,R) \models C(0,1,0,0)$ gdw R ist reflexiv

Nach Definition ist $C(0,1,0,0)$

$$\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((w_1 = w_2 \land w_1 = w_3) \to \exists w_4(R(w_2,w_4) \land w_3 = w_4))$$

Ersetze w_2 und w_3 durch w_1

$$\forall w_1 \exists w_4(R(w_1,w_4) \land w_1 = w_4)$$

also

$$\forall w_1 R(w_1,w_1)$$

Aufgabe

Ist die Klasse aller Rahmen (G, R), wobei R die Gleichheitsrelations auf G ist charakterisierbar?

Lösung:

$p \leftrightarrow \Box p$ ist eine charakterisierende Formel.