Korrespondenztheorie

Eine Konstruktionsmethode

Aufgabenstellung

Finde zu einer modalen Formel

A eine PK1-Formel F,

so daß für alle Kripke Rahmen $\mathcal{G} = (G, R)$ gilt

$$\mathcal{G} \models F$$

genau dann, wenn für jede Bewertungsfunktion $v : G \times P \rightarrow \{0, 1\}$

$$(G, R, v) \models A.$$

Beispiel:

$$A = \Box p \rightarrow p.$$

$$F = ??$$

Approximation

Zu jeder modalen Formel

A existiert stets eine Formel A^2

der Logik zweiter Stufe, so daß für alle Kripke Rahmen $\mathcal{G} = (G, R)$

$$\mathcal{G} \models A^2$$

genau dann gilt, wenn für jede Bewertungsfunktion $v : G \times P \to \{0, 1\}$

$$(G, R, v) \models A.$$

Beispiel:

$$A = \Box p \to p.$$

$$A^2 = \forall X \forall x (\forall y (R(x, y) \to X(y)) \to X(x))$$

Übergang zur negierten Formel

Es stellt sich heraus, daß es sinvoll ist die Formel $\neg A^2$ zu betrachten.

Beispiel:

$$\neg A^2 = \exists X \exists x (\forall y (R(x,y) \rightarrow X(y)) \land \neg X(x))$$

Skolemisierung

Erstelle eine Skolem-Normalform von $\neg A^2$

Beispiel:

$$\neg A^2 = \exists X \exists x (\forall y (R(x,y) \to X(y)) \land \neg X(x))$$

Skolem-NF:

$$\forall y (R(a,y) \to p(y)) \land \neg p(a)$$

Klauselnormalform

Erstelle eine Klauselnormalform der Skolemisierten Formel

Beispiel:

von

$$\forall y(R(a,y) \to p(y)) \land \neg p(a)$$

zu

$$\neg R(a,y) \lor p(y)$$
$$\neg p(a)$$

Resolution

Führe, falls möglich, Resolutionsschritte durch.

Beispiel:

von

$$\neg R(a, y) \vee p(y)$$
$$\neg p(a)$$

zu

$$\neg R(a, y) \vee p(y)$$
$$\neg p(a)$$
$$\neg R(a, a)$$

Umformungen

Führe strikt Erfüllbarkeit erhaltende Umformungen durch.
(Definition folgt)

Beispiel:

von

$$\forall y(\neg R(a,y) \lor p(y)) \quad \neg p(a) \quad \neg R(a,a)$$

zu

$$\neg R(a,a)$$

Die letzten Schritt

Anti-Skolemisierung

Beispiel:
von

$$\neg R(a, a)$$

zu

$$\exists x \neg R(x, x)$$

Negation

Beispiel:

$$\forall x R(x, x)$$

Zweites Beispiel

modale Formel B: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

zweiter Stufe Formel B^2:

$$\forall X \forall x ($$
$$\forall y (R(x,y) \rightarrow X(y))) \rightarrow \forall z (R(x,z) \rightarrow \forall w (R(z,w) \rightarrow X(w)))$$

$\neg B^2$:

$$\exists X \exists x ((\forall y (R(x,y) \rightarrow X(y))) \land \exists z (R(x,z) \land \exists w (R(z,w) \land \neg X(w))))$$

Skolemisierung und Klauselnormalform:

$$\forall y (\neg R(a,y) \lor p(y))$$
$$R(a,b)$$
$$R(b,c)$$
$$\neg p(c)$$

Zweites Beispiel (Forts.)

Klauselnormalform:

$$\forall y(\neg R(a,y) \vee p(y)) \quad R(a,b) \quad R(b,c) \quad \neg p(c)$$

Resolution:

$$\forall y(\neg R(a,y) \vee p(y)) \quad R(a,b) \quad R(b,c) \quad \neg p(c) \quad \neg R(a,c)$$

se-äquivalente Umformung:

$$R(a,b) \quad R(b,c) \quad \neg R(a,c)$$

Antiskolemisierung

$$\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \neg R(x,z))$$

Negation

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$$

Vorbereitende Definition

Sei

$\mathcal{M}_1$ eine prädikatenlogische Struktur zum Vokabular V_1,
$\mathcal{M}_2$ eine prädikatenlogische Struktur zum Vokabular V_2.
$\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ haben dasselbe Universum M.

$\mathcal{M}_2$ heißt eine Fortsetzung von $\mathcal{M}_1$,

wenn die Interpretation von Symbolen aus $V_1 \cap V_2$ in $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ übereinstimmen.

Strikte Erfüllbarkeitsäquivalenz

Seien F_1, F_2 Formeln der Logik zweiter Stufe wobei F_1 im Vokabular V_1 aufgeschrieben ist und F_2 im Vokabular V_2.
F_1, F_2 heißen

strikt erfüllbarkeitsäquivalent (se-äquivalent),

wenn für jede V_1-Struktur $\mathcal{M}$ und Variablenbelegung β, γ mit

$$(\mathcal{M}, \beta, \gamma) \models F_1$$

eine V_2-Fortsetzung $\mathcal{M}^*$ von $\mathcal{M}$ existiert mit

$$(\mathcal{M}^*, \beta, \gamma) \models F_2$$

und umgekehrt

zu jeder V_2-Struktur $\mathcal{N}$ und β,γ mit

$$(\mathcal{N}, \beta, \gamma) \models F_2$$

eine V_1-Fortsetzung $\mathcal{N}^*$ von $\mathcal{N}$ existiert mit

$$(\mathcal{N}^*, \beta, \gamma) \models F_1.$$

Eigenschaften der se-Äquivalenz

- Sind F_1, F_2 Formeln der Logik zweiter Stufe im selben Vokabular $V = V_1 = V_2$, dann sind F_1 und F_2 genau dann se-äquivalent, wenn $F_1 \leftrightarrow F_2$ allgemeingültig ist.
- Sei F eine Formel im Vokabular $V = V_0 \cup \{c\}$, c ein Konstantensymbol. $F_0(x)$ entstehe aus F indem jedes Vorkommen von c in F durch das neue Variablensymbol x ersetzt wird. Dann sind F und $\exists x F_0(x)$ se-äquivalent.
- Sei F eine Formel im Vokabular $V = V_0 \cup \{p\}$, p ein einstelliges Relationsymbol. $F_1(X)$ entstehe aus F indem jedes Vorkommen von $p(t)$ in F durch $X(t)$ mit einem neuen Variablensymbol X ersetzt wird. Dann sind F und $\exists X F_1(X)$ se-äquivalent.
- F_{sk} entstehe aus F durch Skolemisierung. Dann sind F_{sk} und F se-äquivalent.

Eigenschaften der se-Äquivalenz

Sei K eine Menge von Klauseln,
K_1, K_2 zwei Klauseln,
p ein Prädikatensymbol und
$t_1^1, \ldots t_n^1$ Variable oder Konstantensymbole und
$t_1^2, \ldots t_n^2$ beliebige Terme.
σ ein Unifikator für $p(t_1^1, \ldots t_n^1)$ und $p(t_1^2, \ldots t_n^2)$.
Außerdem komme p weder in K, K_1 noch K_2 vor. Dann sind

$$K \wedge (K_1 \vee p(t_1^1, \ldots t_n^1)) \wedge (K_2 \vee \neg p(t_1^2, \ldots t_n^2))$$

und

$$K \wedge \sigma(K_1 \vee K_2)$$

se-äquivalent.
Die universellen Quantoren sind explizit hinzuschreiben.

Eigenschaften der se-Äquivalenz

Sei F_1 eine Formel im Vokabular V_1,
F_2 eine quantorenfreie Formel im Vokabular V_2,
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$
und F_2 sei erfüllbar.

Dann sind $F_1 \land F_2$ und F_1 se-äquivalent.

Noch ein Beispiel

Gegeben sei die modale Formel A:

$$\Diamond^m \Box^n p \rightarrow \Box^j \Diamond^k p$$

zweiter Stufe Formel:

$$
\begin{aligned}
A^2 = {} & \forall X \forall x(\\
& \quad \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m (R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge \\
& \quad \forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n (\\
& \quad R(y_m, z_1) \rightarrow R(z_1, z_2) \rightarrow \ldots \rightarrow R(z_{n-1}, z_n) \rightarrow X(z_n))) \\
\rightarrow & \\
& \quad \forall u_1 \forall u_2 \ldots \forall u_j (R(x, u_1) \rightarrow R(u_1, u_2) \rightarrow R(u_{j-1}, u_j) \rightarrow \\
& \quad \exists w_1 \exists w_2 \ldots \exists w_k (\\
& \quad R(u_j, w_1) \wedge R(w_1, w_2) \wedge \ldots \wedge R(w_{k-1}, w_k) \wedge X(w_k))) \\
& \quad)
\end{aligned}
$$

Negation

$$A^2 = \forall X \forall x($$

$$\exists \bar{y}(R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge$$

$$\forall \bar{z}_1(R(y_m, z_1) \rightarrow R(z_1, z_2) \rightarrow \ldots \rightarrow R(z_{n-1}, z_n) \rightarrow X(z_n)))$$

$$\rightarrow$$

$$\forall \bar{u}(R(x, u_1) \rightarrow R(u_1, u_2) \rightarrow R(u_{j-1}, u_j) \rightarrow$$

$$\exists \bar{w} R(u_j, w_1) \wedge R(w_1, w_2) \wedge \ldots \wedge R(w_{k-1}, w_k) \wedge X(w_k))))$$

$$\neg A^2 = \exists X \exists x($$

$$\exists \bar{y}(R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge$$

$$\forall \bar{z}(R(y_m, z_1) \rightarrow R(z_1, z_2) \rightarrow \ldots \rightarrow R(z_{n-1}, z_n) \rightarrow X(z_n)))$$

$$\wedge$$

$$\exists \bar{u}(R(x, u_1) \wedge R(u_1, u_2) \wedge R(u_{j-1}, u_j) \wedge$$

$$\forall \bar{w}(\neg R(u_j, w_1) \vee \neg R(w_1, w_2) \vee . \vee \neg R(w_{k-1}, w_k) \vee \neg X(w_k))))$$

Skolemisierung und KNF

$$\neg A^2 = \exists X \exists x($$

$$\exists \bar{y}(R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge$$

$$\forall \bar{z}(R(y_m, z_1) \rightarrow R(z_1, z_2) \rightarrow \ldots \rightarrow R(z_{n-1}, z_n) \rightarrow X(z_n)))$$

$$\wedge$$

$$\exists \bar{u}(R(x, u_1) \wedge R(u_1, u_2) \wedge R(u_{j-1}, u_j) \wedge$$

$$\forall \bar{w}(\neg R(u_j, w_1) \vee \neg R(w_1, w_2) \vee . \vee \neg R(w_{k-1}, w_k) \vee \neg X(w_k))))$$

Resultat:

$$R(a, b_1) \quad R(b_1, b_2) \quad R(b_{m-1}, b_m)$$

$$\forall \bar{z}(\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee p(z_n))$$

$$R(a, c_1) \quad R(c_1, c_2) \quad R(c_{j-1}, c_j)$$

$$\forall \bar{w}(\neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, w_k) \vee \neg p(w_k))$$

Resolution

$R(a, b_1) \quad R(b_1, b_2) \quad R(b_{m-1}, b_m)$

$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n (\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee p(z_n))$

$R(a, c_1) \quad R(c_1, c_2) \quad R(c_{j-1}, c_j)$

$\forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_k (\neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, w_k) \vee \neg p(w_k))$

$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_{k-1}$

$(\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n \vee \neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, z_n)))$

mit

$z_n = w_k$

se-äquivalente Umformungen

von

$$R(a, b_1) \quad R(b_1, b_2) \quad R(b_{m-1}, b_m)$$

$$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n (\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee p(z_n))$$

$$R(a, c_1) \quad R(c_1, c_2) \quad R(c_{j-1}, c_j)$$

$$\forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_k (\neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, w_k) \vee \neg p(w_k))$$

$$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_{k-1}$$

$$(\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n \vee \neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, z_n))$$

zu

$$R(a, b_1) \quad R(b_1, b_2) \quad R(b_{m-1}, b_m)$$

$$R(a, c_1) \quad R(c_1, c_2) \quad R(c_{j-1}, c_j)$$

$$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_{k-1}$$

$$(\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee \neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, z_n))$$

Anti-Skolemisierung

von

$$R(a, b_1) \quad R(b_1, b_2) \quad R(b_{m-1}, b_m)$$
$$R(a, c_1) \quad R(c_1, c_2) \quad R(c_{j-1}, c_j)$$
$$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_{k-1}$$
$$(\neg R(b_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee \neg R(c_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, z_n))$$

zu

$$\exists x \exists y_1 \ldots \exists y_m \exists u_1 \ldots \exists u_j ($$
$$R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge$$
$$R(x, u_1) \wedge R(u_1, c_2) \wedge R(u_{j-1}, u_j) \wedge$$
$$\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \forall w_1 \forall w_2 \ldots \forall w_{k-1}$$
$$(\neg R(y_m, z_1) \vee \ldots \vee \neg R(z_{n-1}, z_n) \vee \neg R(u_j, w_1) \vee \ldots \vee \neg R(w_{k-1}, z_n)))$$

Negation

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y_1 \ldots \forall y_m \forall u_1 \ldots \forall u_j(\\
&R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_{m-1}, y_m) \wedge \\
&R(x, u_1) \wedge R(u_1, c_2) \wedge R(u_{j-1}, u_j) \rightarrow \\
&\exists z_1 \exists z_2 \ldots \exists z_n \exists w_1 \forall w_2 \ldots \exists w_{k-1} \\
&(R(y_m, z_1) \wedge \ldots \wedge R(z_{n-1}, z_n) \wedge R(u_j, w_1) \wedge \ldots \wedge R(w_{k-1}, z_n)))
\end{aligned}$$

In anderer Notation:

$$\forall x \forall y_m \forall u_j ((R^m(x, y_m) \wedge R^j(x, u_j)) \rightarrow \exists z_n (R^n(y_m, z_n) \wedge R^k(u_j, z_n)))$$