Normale Modale Logiken

Normale Modallogiken

$\mathbf{L} \subseteq Fml_{ALmod}$ heißt eine normale Modallogik, wenn:

- $\mathbf{L}$ enthält alle aussagenlogischen Tautologien,
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \in \mathbf{L}$ für AL-Variable A, B,
- $\mathbf{L}$ ist abgeschlossen unter modus ponens,
  d.h. mit $A \in \mathbf{L}$ und $(A \rightarrow B) \in \mathbf{L}$ gilt auch $B \in \mathbf{L}$.
- aus $A \in \mathbf{L}$ folgt $\Box A \in \mathbf{L}$
- $\mathbf{L}$ ist abgeschlossen unter Instantiierungen,
  d.h. gilt $A \in \mathbf{L}$ und ist A' eine Instanz von A, dann gilt auch $A' \in \mathbf{L}$.

Normale modallogische Systeme

Ein modallogisches System $\mathbf{S}$ heißt ein

normales modallogisches System,

wenn die Menge aller Tautologien in $\mathbf{S}$ eine normale Modallogik ist.
Mit Ausnahme von $\mathbf{C}$ sind alle bisher betrachteten modallogischen Systeme normal.

Zur Erinnerung

Das System $\mathbf{C}$ is definiert durch

$$\mathbf{K} \quad + \quad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B} \quad \text{statt (G)}$$

Elementare Eigenschaften

Für eine normale Modallogik $\mathbf{L}$ gilt für alle Formeln A,B,C:

1. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B) \in \mathbf{L}$
2. Aus $(A \rightarrow B) \in \mathbf{L}$ folgt auch $(\Box A \rightarrow \Box B) \in \mathbf{L}$
3. Gilt $(A \leftrightarrow B) \in \mathbf{L}$ und D entsteht aus der Formel C, indem die Teilformel A in C durch B ersetzt wird, dann gilt auch $(C \leftrightarrow D) \in \mathbf{L}$

Vollständigkeit normaler Modallogiken

Definitionen

Sei $\mathbf{L}$ eine normale Modallogik.

Eine Teilmenge $F \subseteq Fml_{ALmod}$ heißt $\mathbf{L}$-inkonsistent, wenn es Formeln $A_1, \ldots, A_k \in F$ gibt mit

$$(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_k) \in \mathbf{L}.$$

F heißt $\mathbf{L}$-konsistent, wenn F nicht $\mathbf{L}$-inkonsistent ist.

Eine konsistente Teilmenge $F \subseteq Fml_{ALmod}$ heißt maximal konsistent, wenn für jede Formel $A \in Fml_{ALmod}$

entweder $A \in F$ oder $\neg A \in F$

gilt.

Elementare Eigenschaften

Sei $\mathbf{L}$ eine normale Modallogik und $F \subseteq Fml_{ALmod}$ eine maximal konsistente Teilmenge bezüglich $\mathbf{L}$.
Dann gelten die folgenden Aussagen:

- für jede Formel A ist genau eine der beiden Formeln A , $\neg A$ Element von F,
- $(A \vee B) \in F$ genau dann, wenn $A \in F$ oder $B \in F$,
- $(A \wedge B) \in F$ genau dann, wenn $A \in F$ und $B \in F$,
- $\mathbf{L} \subseteq F$,
- F ist abgeschlossen unter modus ponens.

Erweiterungslemma:

Zu jeder konsistenten Formelmenge F gibt es eine maximal konsistente Obermenge F_{max}.

Konsistenz und Modaloperatoren

Für jede Menge $F \subseteq Fml_{ALmod}$ setzen wir:

$$\Box^- F = \{A \mid \Box A \in F\}$$
$$\Box^+ F = \{\Box A \mid A \in F\}$$
$$\Diamond^- F = \{A \mid \Diamond A \in F\}$$
$$\Diamond^+ F = \{\Diamond A \mid A \in F\}$$

Lemma:

Ist F konsistent und $\neg\Box A \in F$, dann ist auch $\Box^- F \cup \{\neg A\}$ konsistent.

Lemma

Ist F konsistent und $\neg\Box A \in F$, dann ist auch $\Box^- F \cup \{\neg A\}$ konsistent.

Beweis: Annahme: $\Box^- F \cup \{\neg A\}$ wäre inkonsistent.

$$(\neg C_1 \vee \ldots \vee \neg C_k \vee A) \in \mathbf{L} \tag{1}$$

Mit AL

$$(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \rightarrow A) \in \mathbf{L} \tag{2}$$

Abgeschlossenheit von $\mathbf{L}$ unter $\Box$

$$\Box(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \rightarrow A) \in \mathbf{L} \tag{3}$$

Verträglichkeit von $\Box$ und $\rightarrow$

$$(\Box(C_1 \wedge \ldots \wedge C_k) \rightarrow \Box A) \in \mathbf{L} \tag{4}$$

Verträglichkeit von $\Box$ und $\wedge$

$$(\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box C_k) \rightarrow \Box A) \in \mathbf{L} \tag{5}$$

mit AL

$$(\neg\Box C_1 \vee \ldots \vee \neg\Box C_k \vee \Box A) \in \mathbf{L} \tag{6}$$

Widerspruch zur Konsistenz von F.

Kanonisches Modell

Definition:
Das kanonische Kripkemodell $\mathcal{K}_L = (G_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}}, v_{\mathbf{L}})$ einer normalen Modallogik $\mathbf{L}$ ist gegeben durch:

- $G_{\mathbf{L}}$ ist die Menge aller maximal konsistenten Formelmengen bezüglich $\mathbf{L}$,
- für $W_1, W_2 \in G_{\mathbf{L}}$ gilt $R_{\mathbf{L}}(W_1, W_2)$ genau dann, wenn $\Box^{-} W_1 \subseteq W_2$,
- für jede AL-Variable p und $W \in G_{\mathbf{L}}$ setzt man $v_{\mathbf{L}}(W, p) = 1$ genau dann, wenn $p \in W$

Kanonisches Modell: Eigenschaften

Theorem:

Sei $\mathbf{L}$ eine normale Modallogik und $\mathcal{K}_L = (G_\mathbf{L}, R_\mathbf{L}, v_\mathbf{L})$ ihr kanonisches Kripkemodell. Dann gilt für jede Welt $W \in G_\mathbf{L}$ und jede Formel $A \in Fml_{ALmod}$:

$$v_\mathbf{L}(W, A) = 1 \quad gdw \quad A \in W$$

Korollar:

Ist $\mathcal{K}_L$ das kanonische Kripkemodell der normale Modallogik $\mathbf{L}$, dann gilt für jede Formel $A \in Fml_{ALmod}$:

$$A \in \mathbf{L} \text{ genau dann, wenn } \mathcal{K}_L \models A$$

Kanonisches Modell: Eigenschaften

Korollar:
Sei $\mathbf{S}$ ein normales modallogisches System und $\mathcal{K}$ das kanonische Kripkemodell der Logik $\mathbf{L} = \{A \mid \vdash_{\mathbf{S}} A\}$. Dann gilt

$$\vdash_{\mathbf{S}} A \quad gdw \quad \mathcal{K} \models A$$

Vollständigkeitssätze

Vollständigkeit für $\mathbf{K}$

Für jede modallogische Formel A gilt

$\vdash_{\mathbf{K}} A$ gdw $\mathcal{M} \models A$ für jede Kripke Struktur $\mathcal{M}$

Vollständigkeit für $\mathbf{T}$

$\vdash_{\mathbf{T}} A$ gdw $\mathcal{M} \models A$ für jede reflexive Kripke Struktur $\mathcal{M}$

Vollständigkeitssätze (Forts.)

Vollständigkeit für $\mathbf{S4}$

$\vdash_{\mathbf{S4}} A$ gdw $\mathcal{M} \models A$ für jedes
reflexive transitive $\mathcal{M}$

Vollständigkeit für $\mathbf{S5}$

$\vdash_{\mathbf{S5}} A$ gdw $\mathcal{M} \models A$ für jede
Kripke Struktur $\mathcal{M}$, deren Zugänglichkeitsrelation
eine Äquivalenzrelation ist.

Allgemeine Vollständigkeitsvermutung

Sei $\mathcal{R}$ eine Klasse von Rahmen, die durch die Formeln $C_1, \ldots, C_k \in Fml_{ALmod}$ charakterisiert wird und $\mathcal{K}$ die Klasse aller Kripke Strukturen mit Rahmen in $\mathcal{R}$.

Das modallogische System S entstehe aus dem System $\mathbf{K}$ durch Hinzunahme von $C_1, \ldots, C_k$ als neue Axiome.

Dann gilt für jedes $A \in Fml_{ALmod}$:

$$\vdash^{\mathbf{S}} A \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M} \models A \text{ für jede Kripke Struktur } \mathcal{M} \text{ in } \mathcal{K}$$

Diese Vermutung ist leider falsch.