Entscheidbarkeit

Ununterscheidbarkeit bzgl. Γ

Gegeben:

- Eine Kripke Struktur $\mathcal{K} = (G, R, v)$ und
- eine Formelmenge $\Gamma \subseteq Fml_{ALmod}$

Die Ununterscheidbarkeitsrelation $\sim_\Gamma$ auf G wird definiert durch:

$$g \sim_\Gamma h \text{ gdw } (\mathcal{K}, g) \models A \Leftrightarrow (\mathcal{K}, h) \models A \text{ für alle } A \in \Gamma$$

Offensichtlich ist $\sim_\Gamma$ eine Äquivalenzrelation.
Für $g \in G$ bezeichnen wir mit $[g]$ die Äquivalenzklasse von g bezüglich $\sim_\Gamma$, i.e.

$$[g] = \{h \in G \mid g \sim_\Gamma h\}.$$

Filtration bzgl. Γ

Gegeben sei wieder eine Kripke Struktur $\mathcal{K} = (G, R, v)$ und eine Formelmenge $\Gamma \subseteq Fml_{ALmod}$

Die Kripke Struktur $\mathcal{K}_\Gamma = (G_\Gamma, R_\Gamma, v_\Gamma)$ ist wie folgt definiert

$$\begin{array}{lcll} G_\Gamma & = & \{[g] \mid g \in G\} & \\ [g]R_\Gamma[h] & \Leftrightarrow & \exists g_0 \in [g] \exists h_0 \in [h](g_0 R h_0) & \\ v_\Gamma([g], p) & = & v(g, p) & p \in \Gamma \\ v_\Gamma([g], p) & = & \text{beliebig} & \text{sonst} \end{array}$$

$\mathcal{K}_\Gamma$ heißt eine Filtration von $\mathcal{K}$ bezüglich Γ.

Filtrationslemma für K

1. Sei $\Gamma \subseteq Fml_{ALmod}$ abgeschlossen unter Teilformeln, dann gilt für alle $A \in \Gamma$ und alle $g \in G$

$$(\mathcal{K}, g) \models A \text{ gdw } (\mathcal{K}_\Gamma, [g]) \models A$$

2. Ist Γ endlich mit $\#\Gamma = n$, dann ist $\#G(\Gamma) \leq 2^n$.

Entscheidbarkeit für $\mathbf{K}$

Theorem:
Die modale Aussagenlogik K ist entscheidbar, d.h. es gibt einen Algorithmus, der für jede Formel $A \in Fml_{ALmod}$ entscheidet, ob A eine K-Tautologie ist oder nicht.

Beweis:
Sei Γ die endliche Menge aller Teilformeln von $\neg A$.
Wenn $\neg A$ überhaupt erfüllbar ist, dann nach dem Filtrationslemma auch in einer Kripke Struktur mit höchstens 2^n Welten, $n = \#\Gamma$.
Alle Kripke Stukturen mit höchstens 2^n Welten lassen sich endlich aufzählen und es ist für jede dieser Strukturen entscheidbar ob $\neg A$ in ihr wahr ist oder nicht.

Entscheidbarkeitstheorem

Jede modale Logik, die aus K durch Hinzunahme von einem oder mehreren der Axiome

$$\Box p \rightarrow p$$

$$p \rightarrow \Box\Diamond p$$

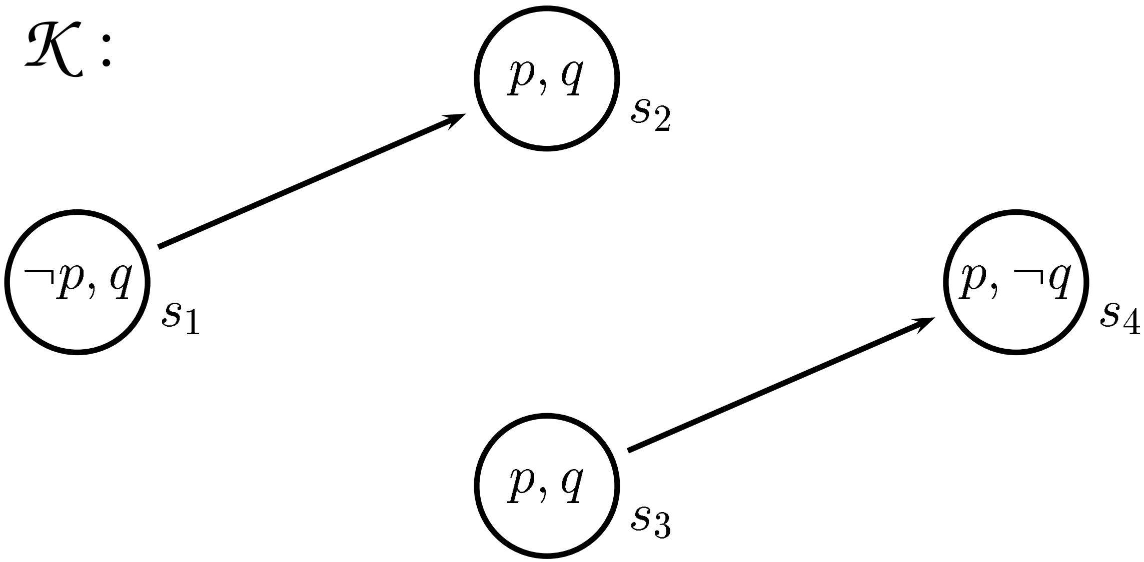
$$\Box p \rightarrow \Box\Box p$$

entsteht, besitzt die endliche Modelleigenschaft und ist entscheidbar.

Beweis:
Man muß zeigen, daß der filtrierte Rahmen (G_Γ, R_Γ) reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist, wenn der Ausgangsrahmen (G, R) diese Eigenschaft hatte.

Filtration transitiver Strukturen

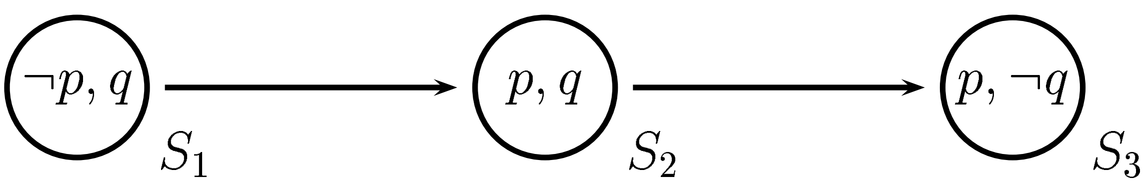
$\mathcal{K}:$



transitiv

$\Gamma = \{p, q\}$

$\mathcal{K}_\Gamma:$



nicht transitiv