Tableaukalkül

Präfixformeln

In den Tableaus werden Gebilde der Form

$$\sigma\, Z\, A$$

auftreten, wobei σ ein Präfix, $Z \in \{F, T\}$ und $A \in Fml_{Qmod}$.

Ein Präfix σ ist dabei eine endliche Folge natürlicher Zahlen.

Wir nennen für die Modallogik K

σ_1 zugänglich von σ,

wenn

$$\sigma_1 = \sigma n$$

für ein geeignetes n ist.

Formelklassen

α-Formeln sind:	$T\ A \wedge B, \quad F\ A \vee B, \quad F\ A \rightarrow B, \quad F\ \neg A$
β-Formeln sind:	$T\ A \vee B, \quad F\ A \wedge B, \quad T\ A \rightarrow B, \quad T\ \neg A$
γ-Formeln:	$T\ \forall x A(x), \quad F\ \exists x A(x)$
δ-Formeln:	$T\ \exists x A(x), \quad F\ \forall x A(x)$
ν-Formeln:	$T\ \Box A, \quad F\ \Diamond A$
π-Formeln:	$T\ \Diamond A, \quad F\ \Box A$

Nachfolgerformeln

Jeder α- und β-Formel ordnen wir zwei Nachfolgerformeln α_1, α_2 bzw. β_1, β_2 zu:

α	α_1	α_2
$T\ A \wedge B$	$T\ A$	$T\ B$
$F\ A \vee B$	$F\ A$	$F\ B$
$F\ A \rightarrow B$	$T\ A$	$F\ B$
$F\ \neg A$	$T\ A$	$T\ A$

β	β_1	β_2
$T\ A \vee B$	$T\ A$	$T\ B$
$F\ A \wedge B$	$F\ A$	$F\ B$
$T\ A \rightarrow B$	$T\ B$	$F\ A$
$T\ \neg A$	$F\ A$	$F\ A$

Nachfolgerformeln (Forts.)

Den γ-, δ-, ν-, π-Formeln wird jeweils eine Nachfolgerformel $\gamma_0, \ldots, \pi_0$ zugeordnet.

γ	$\gamma_0(x)$
$T\ \forall x A(x)$	$T\ A(x)$
$F\ \exists x A(x)$	$F\ A(x)$

δ	$\delta_0(x)$
$T\ \exists x A(x)$	$T\ A(x)$
$F\ \forall x A(x)$	$F\ A(x)$

ν	ν_0
$T\ \Box A$	$T\ A$
$F\ \Diamond A$	$F\ A$

π	π_0
$T\ \Diamond A$	$T\ A$
$F\ \Box A$	$F\ A$

Aussagenlogische Tableauregeln

Für jede α-Formel α, jede β-Formel β und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1\\ \sigma\alpha_2\end{array}} \qquad\qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \text{ oder } \sigma\beta_2}$$

Tableauregeln für Quantoren

Für jede γ-Formel γ und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\gamma}{\sigma\gamma_0(x)}$$

wobei x eine neue freie Variable ist.

Für jede δ-Formel δ und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\delta}{\sigma\delta_0(f(y_1,\ldots,y_n))}$$

wobei f ein neues Skolemfunktionszeichen ist
und $y_1,\ldots,y_n$ die freien Variablen in δ.

Modale Tableauregeln

Für jede ν-Formel ν und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\nu}{\sigma'\nu_0}$$

wobei σ' von σ aus zugänglich sein und auf dem Pfad, der durch diese Regel verlängert wird, schon vorkommen muß.

Für jede π-Formel π und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\pi}{\sigma'\pi_0}$$

wobei σ' eine unbeschränkte Erweiterung von σ ist, d.h., σ' ist von σ aus erreichbar und σ' ist kein Anfangsstück eines anderen Präfixes auf dem Pfad.

Varianten

Die angegebenen ν- und π-Regeln sind korrekt und vollständig für die modale Logik K.

Für andere Logiken müssen neben einer möglichen Änderung der Zugänglichkeitsrelation für Präfixe auch die beiden modalen Regeln eventuell modifiziert werden.

Ein Tableau, das mit Hilfe der obigen Regeln aufgebaut ist, nennen wir ein K-Tableau.

In der Logik $S4$ ist ein Präfix σ' von σ aus zugänglich genau dann, wenn σ ein Anfangsstück von σ' ist. Insbesondere kann auch $\sigma' = \sigma$ sein.

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)
1	$T\ \Box A$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3) aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4) aus 3
11	$F\ \Box A$	(5) aus 4
11	$F\ B$	(6) aus 4
111	$F\ A$	(7) aus 5
111	$T\ A$	(8) aus 2

Im $\mathbf{K}$-Kalkül dagegen kann in Zeile 8 nur $11\ \ T\ A$ stehen, was nicht reicht, um das Tableau zu schließen.

Einschränkung der ν-Regel

$$\begin{array}{rll}
1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\
1 & T\,\Box A & (2)\ \text{aus } 1 \\
1 & F\,\Diamond A & (3)\ \text{aus } 1 \\
11 & T\,A & (4)\ \text{aus } 2 \\
11 & F\,A & (5)\ \text{aus } 3
\end{array}$$

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Die Formel $\Box A \rightarrow \Diamond A$ ist aber keine K-Tautologie.

Fazit: Die Einschränkung an die ν-Regel ist notwendig für die Korrektheit des Kalküls.

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)
1	$F\ \Box p$	(2) aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3) aus 1
123	$F\ p$	(4) aus 2
1	$T\ \Diamond\Box p$	(5) aus 3
12	$T\ \Box p$	(6) aus 5
123	$T\ p$	(7) aus 6

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Die Formel $\Box p \vee \neg\Diamond\Box p$ ist aber keine S4-Tautologie.

Fazit: Die Einschränkung an die π-Regel ist notwendig für die Korrektheit des Kalküls.

Geschlossenes Tableau im K-Kalkül

1	$F\ (\Box A \land \Box B) \rightarrow \Box(A \land B)$	(1)
1	$T\ \Box A \land \Box B$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(A \land B)$	(3) aus 1
1	$T\ \Box A$	(4) aus 2
1	$T\ \Box B$	(5) aus 2
11	$F\ A \land B$	(6) aus 3
11	$T\ A$	(7) aus 4
11	$T\ B$	(8) aus 5

$11\ \ F\ A \quad (9)$ aus (6)	$11\ \ F\ B \quad (10)$ aus (6)
abgeschl. $(9,7)$	abgeschl. $(10,8)$

Noch ein Beispiel im K-Kalkül

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\ \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B) & (1) \\
1 & T\ \Box(A \wedge B) & (2)[1] \\
1 & F\ \Box A \wedge \Box B & (3)[1]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll|rll}
1 & F\ \Box A & (4)[3] & 1 & F\ \Box B & (5)[3] \\
11 & F\ A & (6)[4] & 11 & F\ B & (10)[5] \\
11 & T\ A \wedge B & (7)[2] & 11 & T\ A \wedge B & (11)[2] \\
11 & T\ A & (8)[7] & 11 & T\ A & (12)[11] \\
11 & T\ B & (9)[7] & 11 & T\ B & (13)[11] \\
 & \text{abgeschl.} & (8,6) & & \text{abgeschl.} & (13,10)
\end{array}
$$

Man beachte: Formel (2) wird zweimal benutzt.

K-Erfüllbarkeit

Ein Tableau T heißt K-erfüllbar, wenn es

- einen Pfad P in T,
- eine $\mathbf{K}$-Kripkestruktur (G,R,M) und
- eine Abbildung I von der Menge aller Präfixe in P in die Menge G gibt,

so daß

$I(\sigma)RI(\sigma')$ gilt, falls σ' von σ aus zugänglich ist,

und

$M(I(\sigma)) \models A$ gilt für jede Formel σA auf dem Pfad P.

Korrektheitssatz

Gibt es ein geschlossenes $\mathbf{K}$-Tableau mit Wurzelformel

$$1 \;\; FB,$$

dann ist B in allen $\mathbf{K}$-Kripkemodellen gültig.

Vollständigkeitssatz

Ist A eine K-allgemeingültige Formel, dann gibt es ein geschlossenes K-Tableau mit Wurzel

$$1\ F\ A$$

Beweisstrategie

Sei P_0 die Menge der signierten Formeln mit Präfixen auf einem offenen erschöpften Pfad.

Insbesondere liegt für jede ν-Formel $\sigma\nu$ in P_0 auch $\sigma'\nu_0$ in P_0 für **jedes** Präfix σ', das in P_0 vorkommt und von σ aus erreichbar ist.

P entstehe aus P_0, indem – wie immer – die freien Variablen durch variablenfreie Terme ersetzt. Insbesondere gilt für jede Formel $\sigma T \forall x A(x) \in P$ auch $\sigma T A(t/x) \in P$ für jeden variablenfreien Term t.

Gesucht ist ein $\mathbf{K}$-Kripkemodell für P.

Beweis des Vollständigkeitssatzes

Konstruktion des $\mathbf{K}$-Kripkemodells für P

- Die Menge G aller Welten ist die Menge aller Präfixe, die in P vorkommen.
- Die Relation R sei die Zugänglichkeitsrelation auf der Menge aller Präfixe.
- Jeder Welt wird dieselbe Prästruktur zugeordnet, nämlich die Herbrandstruktur in dem Vokabular einschließlich der neu erzeugten Skolemfunktionen.
- eine atomare, variablenfreie Formel A in der Welt σ, genau dann wahr sein soll, wenn σTA in P vorkommt.

Beweisfinale

Durch Induktion über den Aufbau signierter Formeln zeigt man, daß für jedes σC in P

$$\sigma \models C$$

in der Kripkestruktur gilt.

Beweisfinale (Forts.)

Wir beschränken uns auf zwei typische Beispiele.

$\sigma_0 T\Box B$ in P dann liegt für jedes Präfix $\sigma \in G$, das von σ_0 aus erreichbar ist, auch σTB in P. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit für alle σ mit $\sigma_0 R\sigma$: $\sigma \models B$, woraus unmittelbar $\sigma_0 \models \Box B$ folgt.

$\sigma_0 F\Box B$ in P so gibt es, weil wir von einem erschöpften Pfad ausgegangen sind, ein Präfix σ, das von σ_0 aus erreichbar ist, so daß σFB in P liegt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sigma \models FB$$

und damit auch

$$\sigma_0 \models F\Box B.$$

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]
11	$F\ \Box p$	(9)[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)[2]
12	$F\ \Box p$	(11)[3]
111	$T\ p$	(12)[8]
112	$F\ p$	(13)[9]
121	$T\ p$	(14)[10]
122	$F\ p$	(15)[11]

Tableau terminiert nicht.

$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ ist keine S4-Tautologie.