Reduktion modaler Logik auf Prädikatenlogik erster Stufe

Wir beschränkung uns auf modale Logiken mit konstantem Universum.

Kategorie	Modallogik	PK1
Vokabular	V	V_{Red}
Formel	A	$\text{Red}(A)$
Struktur	K	$\text{Red}(K)$

Ziel:

$$(K, g) \models A(a_1, \ldots, a_k)$$
$$\text{gdw}$$
$$\text{Red}(K) \models \text{Red}(A)(a_1, \ldots, a_k, g)$$

Transformation des Vokabulars

- Für jedes n-stellige Relationszeichen in V

$$p(x_1, \ldots, x_n)$$

enthält $V_{\textsf{Red}}$ ein $(n+1)$-stelliges Relationszeichen

$$p_{\textsf{Red}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}).$$

- $V_{\textsf{Red}}$ enthält eine neues binäres Relationszeichen $r(x, y)$ und ein neues einstelliges Raltionszeichen $w(x)$.
- Die Funktions- und Konstantenzeichen von $V_{\textsf{Red}}$ sind dieselben wie für V.

Formeltransformation

- $\mathit{Red}(p(t_1,\ldots,t_n)) = p_{\mathsf{Red}}(t_1,\ldots,t_n,y) \wedge w(y)$
- $\mathit{Red}(A \wedge B) = \mathit{Red}(A) \wedge \mathit{Red}(B)$
- $\mathit{Red}(\neg A) = \neg \mathit{Red}(A)$
- $\mathit{Red}(\exists x A) = \exists x(\neg w(X) \wedge \mathit{Red}(A))$
- $\mathit{Red}(\forall x A) = \forall x(\neg w(X) \rightarrow \mathit{Red}(A))$
- $\mathit{Red}(\Box A) = \forall x(r(y,x) \rightarrow \mathit{Red}(A)(\frac{x}{y}))$
- $\mathit{Red}(\Diamond A) = \exists x(r(y,x) \wedge \mathit{Red}(A)(\frac{x}{y}))$

$\mathit{Red}(A)$ enthält stets eine freie Variable mehr als A immer mit y bezeichnet. y kommt in keiner untransformierten Formel vor. Ebenso ist x in $\mathit{Red}(\Box A)$ und $\mathit{Red}(\Diamond A)$ *neu*.

Beispiel

$Red(\forall x \Box (p(x)) \;\rightarrow\; \Box \forall x p(x))$:

$$\forall x(\neg w(x) \rightarrow [\forall z(R(y,z) \rightarrow p(x,z))])$$
$$\rightarrow$$
$$\forall z(R(y,z) \rightarrow \forall x(\neg w(x) \rightarrow p(x,z)))$$

Strukturtransformation

Sei $K = (G, R, M)$ eine Kripke-Struktur im dem Vokabular V mit Universum $U = U_g$ für alle $g \in G$.

Universum von *Red*(K) = $G \cup U$

Sei g_0 aus G, f Funktionszeichen aus V:

$$f^{\mathit{Red}}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} f^{M(g)} & \text{falls alle } a_i \in U \\ g_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für ein Relationszeichen p aus V setzen wir:

Red(K)$\models p_{\mathit{Red}}(a_1, \ldots, a_n, b)$ gdw $b \in G, a_1, \ldots, a_n \in U$ und $(K, b) \models p(a_1, \ldots, a_n)$

Für die neuen Relationszeichen r und w soll gelten:
Red(K)$\models r(b, c)$ gdw $b, c \in G$ und bRc.
Red(K)$\models w(b)$ gdw $b \in G$.

Erste Reduktion

Lemma

$A(a_1, \ldots, a_k) \in Fml_{Qmod}$, $K = \langle G, R, M \rangle$ eine Kripke-Struktur, $g \in G$ und $a_1, \ldots, a_k \in M(g)$, dann gilt:

$$(K, g) \models A(a_1, \ldots, a_k)$$

gdw

$$\mathit{Red}(K) \models \mathit{Red}(A)(a_1, \ldots, a_k, g)$$

Satz

Seien $A \in Fml_{Qmod}$, $\Sigma \subset Fml_{Qmod}$ ohne freie Variable und *Red*(Σ) = $\{\forall y(w(y) \to \mathit{Red}(B)) \ : \ B \in \Sigma\}$

1. Ist $\forall y(w(y) \to \mathit{Red}(A))$ eine prädikatenlogische Tautologie, dann ist A eine $\mathbf{K}$-Tautologie.
2. Gilt *Red*(Σ) $\vdash \forall y(w(y) \to$ *Red*(A)), dann gilt auch $\Sigma \vdash_G^{\mathbf{K}} A$.

Σ_{Kripke}

$$\exists x w(x)$$

$$\forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow (w(x) \wedge w(y)))$$

Für jedes Relationszeichen $p \in V$:

$\forall x_1 \ldots x_k, y(p_{\textsf{Red}}(x_1 \ldots x_k, y) \rightarrow \neg w(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg w(x_k) \wedge w(y))$

Für jedes Funktionszeichen $f \in V$:

$\forall x_1 \ldots x_k(\neg w(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg w(x_k) \rightarrow \neg w(f(x_1 \ldots x_k)))$

Lemma

M eine V_{Red}-Struktur. Dann gibt es eine Kripke Struktur K im Vokabular V mit

$$\mathit{Red}(K) = M$$

gdw

$$M \models \Sigma_{Kripke}$$

Zweite Reduktion

Satz

Seien $A \in Fml_{Qmod}$, $\Sigma \subset Fml_{Qmod}$ ohne freie Variable und $Red(\Sigma) = \{\forall y(w(y) \rightarrow Red(B)) \ : \ B \in \Sigma\}$

1. A ist eine $\mathbf{K}$-Tautologie

   gdw

   $\Sigma_{Kripke} \vdash_{PK} \forall y(w(y) \rightarrow Red(A))$

2. $Red(\Sigma) \cup \Sigma_{Kripke} \vdash Red(A)$

   gdw

   $\Sigma \vdash^{\mathbf{K}}_{G} A$.